1 **次の問いの答えを解答欄に記せ．すべて結果のみでよい．**

xyz 空間において，$z > 0$ の範囲に中心をもち，原点で xy 平面に接する半径 $\dfrac{1}{2}$ の球を S とする．xy 平面上の点 $\mathrm{P}(u,\ v,\ 0)$ と z 軸上の点 $\mathrm{N}(0,\ 0,\ 1)$ に対し，線分 NP（両端を含む）と球 S の共有点のうち，N でない方の点を $\mathrm{Q}(x,\ y,\ z)$ とする．

⑴　S の方程式を求めよ．

⑵　線分 NP を $s : 1 - s$ に内分する点の座標を u，v．s で表せ．

⑶　点 Q の座標 $(x,\ y,\ z)$ を u，v で表せ．

以下において，点 $\mathrm{P}(u,\ v,\ 0)$ が xy 平面上を動き，時刻 t における x 座標および y 座標が，それぞれ

$$u = e^{kt}\cos t \qquad v = e^{kt}\sin t$$

で与えられるものとする．ただし k は実数の定数である．

⑷　時刻 t における点 Q の座標 $(x,\ y,\ z)$ を求めよ．

⑸　時刻 t における点 Q の速度の大きさを求めよ．

⑹　時刻 $t = T_1$ から $t = T_2$ までの間に点 Q が描いた曲線の長さを $L(T_1,\ T_2)$ として，極限値 $\displaystyle\lim_{T_1\to-\infty}\lim_{T_2\to\infty} L(T_1,\ T_2)$ を求めよ．ただし $k \neq 0$ とする．

2 **次の問いの答えを解答欄に記せ．すべて結果のみでよい．**

$m,\ l$ を $0 < m < l$ なる互いに素な（すなわち 1 以外の公約数をもたない）整数とし，複素数 $z = \cos\dfrac{m}{l}\pi + i\sin\dfrac{m}{l}\pi$ を考える．

(1)　n を正の整数とするとき，z^n を極形式で表せ．

(2)　複素数列 $1,\ z,\ z^2,\ z^3,\ \cdots\cdots$ で表される複素数平面上での点列を $\mathrm{P}_0,\ \mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \mathrm{P}_3,\ \cdots\cdots$ とし，k を $z^k = 1$ となる最小の正の整数とする．隣り合う番号の 2 点を結んで，$\overline{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1}$ から $\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}$ までの k 本の線分を作り，これらの線分の長さの 2 乗の和 $S = \sum_{k=1}^{n}|z^{n-1} - z^n|^2$ を考える．

(a)　$m = 1,\ l = 3$ のとき，k と S を求めよ．

(b)　$m = 3,\ l = 4$ のとき，k と S を求めよ．

(c)　m と l を使って，$k,\ S$ を表す式を求めよ．

(3)　n を正の整数とし，$w_n = f(n,\ m,\ l)z^n$ とおく．ここで $f(n,\ m,\ l)$ は，$m,\ l$ を固定するごとに n の関数となり，正の値をとるものとする．$m,\ l$ をどのようにとっても w_n が次の図形上にあるような $f(n,\ m,\ l)$ を求めよ．答えは $\cos\dfrac{nm}{l}\pi,\ \sin\dfrac{nm}{l}\pi$ を使って表せ．分母に根号がある形でよい．

原点と $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ を焦点とし，点 $-\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ を通る楕円．

3　**次の問いの答えを解答欄に記せ．すべて結果のみでよい．**

xy 平面上の放物線 $L: y=\dfrac{1}{4}x^2$ の上に点 $\mathrm{A}\left(r,\ \dfrac{1}{4}r^2\right)$ をとる．動点 P は，時刻 0 に点 B(0, 1) を出発し，線分 BA 上を速さ 1 で逆戻りせずに A まで進み，その後ただちに，L 上を一定の速さ c で逆戻りせずに進んで，時刻 T に点 C(2, 1) に着いた．ただし c は正の定数であり，A = C のときは，P が線分 BA 上を進んで A に着いた時刻を T とする．線分 BA の長さを s，放物線 L の A から C までの部分の長さを w（A = C のときは $w=0$）として，次の問いに答えよ．

(1)　T を s，w，c で表せ．

(2)　s を r の多項式として表せ．

(3)　s の微分係数 $\dfrac{ds}{dr}$ を求めよ．

(4)　$r>2$ における w の微分係数 $\dfrac{dw}{dr}$ を求めよ．

(5)　$r<2$ における w の微分係数 $\dfrac{dw}{dr}$ を求めよ．

(6)　T を最小にする r の値を求めよ．

(7)　$c=\sqrt{5}$ のとき，T の最小値を求めよ．必要なら，放物線 L の媒介変数表示 $x=e^t-e^{-t}$，$y=\dfrac{1}{4}(e^t-e^{-t})^2$ を用いて計算せよ．