1から5は結果のみを答えよ．6は途中経過も記せ．

1　xy 平面上の曲線 $y = \sin x \cos^3 x + x$ の，点 $(0,\ 0)$ における接線と点 $\left(\dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{1}{4} + \dfrac{5}{4}\pi\right)$ における接線の交点を求めよ．

2　次の方程式と不等式を解け．ただし，x が実数とする．

(1)　$(x^3 + x^2 + x)(2x + 1) = 0$

(2)　$|x^3 + x^2 + x| - |2x + 1| \geqq |x|^3$

3　$f(x)$ は，実数を係数とする 3 次の多項式で，最高次の係数は 1 であり，$f(0) = 0$，$f(1 + i) = 0$ を満たすとする．この $f(x)$ を展開した形で表せ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ である．

4 空間において，定点 O，A を $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 2$ となるようにとり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OX}} = |\overrightarrow{\mathrm{OX}}|^2$ を満たす点 X 全体の集合を F とする．

(1) F はどんな図形か．

(2) 2 点 X_1，X_2 を F 上にとるとき，4 点 O，A，X_1，X_2 を頂点とする 4 面体の体積の最大値を求めよ．

5 平面上に，O を極とし半直線 OX を始線とする極座標 (r, θ) をとり，2 つの曲線 $r = \theta\ (\theta \geqq 0)$，$r = a\theta\ (\theta \geqq 0)$ を考える．ただし，a は $0 < a < 1$ を満たす定数とする．

(1) 「この 2 つの曲線の共有点が，始線 OX（極 O を除く）上に少なくとも 1 つ存在する」ための a の条件を求めよ．

(2) 「この 2 つの曲線の共有点が，すべて始線 OX（極 O を含む）上に存在する」ための a の条件を求めよ．

6 xy 平面上の曲線

$$y = b(5a^2 - x^2) \quad (0 \leqq x \leqq \sqrt{5}a)$$

と x 軸および y 軸によって囲まれる部分を D とする．ただし，$a,\ b > 0$ とする．

(1) D を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体 K の体積が $\dfrac{40}{3}\sqrt{5}\pi$ となるための $a,\ b$ の条件を求めよ．

(2) $a,\ b$ が(1)の条件および $0 < a \leqq 1$ を満たして動くとき，xy 平面において，D が通過する領域を E とする．このとき，$0 < s < \sqrt{5}$ を満たす定数 s に対し，直線 $x = s$ と E の共通部分の長さ $L(s)$ を求めよ．

(3) $t > 0$ に対して，(2)で考えた領域 E の $x \geqq t$ を満たす部分の面積を $S(t)$ とする．t が正の方向から限りなく 0 に近づいたときの $S(t)$ の極限値を求めよ．