1 次の文章の空欄に適する数を解答欄に記せ．ただし，分数は既約分数の形で答えよ．

正の整数 n に対し，n 以下の正の整数のうち，3 で割り切れるものの個数を a_n，3 または 7 で割り切れるものの個数を b_n，3 または 7 で割り切れるものの総和を S_n とする．たとえば，$a_{100} = \boxed{\text{ア}}$，$b_{100} = \boxed{\text{イ}}$，$S_{100} = \boxed{\text{ウ}}$ である．n が限りなく大きくなるとき，$\dfrac{a_n}{n}$ は $\boxed{\text{エ}}$ に収束し，$\dfrac{b_n}{n}$ は $\boxed{\text{オ}}$ に収束する．また，n が限りなく大きくなるとき，$\dfrac{S_n}{n^c}$ が正の数に収束するような定数 c の値は $\boxed{\text{カ}}$ であり，c をこのように定めると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^c} = \boxed{\text{キ}}$ となる．

2

関数 $f(x) = (x+1)(x-1)(x-2)$ とその導関数 $f'(x)$ について，次の設問に答えよ．

(1) 方程式 $f'(x) = 0$ を解け．

(2) $f(x)$ を $f'(x)$ で割った商と余りを求めよ．

(3) 関数 $f(x)$ の増減を調べ．方程式 $f(x) = a$ が 3 個の異なる実数解をもつような定数 a の範囲を求めよ．

3

O を原点とする xy 平面において，次のような移動を考える．

- x，$y \neq 0$ なる点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を，点 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{x},\ \dfrac{1}{y}\right)$ に移す．この移動を f とする．
- 原点ではない点 P を，半直線 OP 上の点で $|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|\,|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = 1$ を満たす点 R に移す．この移動を g とする．

(1)　点 $\mathrm{P}(2,\ 3)$ を f で移動した点 Q の座標，および g で移動した点 R の座標を求めよ．結果のみを記せ．

(2)　点 P を f や g で移動したとき，動かない点を不動点という．f，g それぞれについて不動点全体のなす集合を求めよ．結果のみを記せ．

(3)　点 P が直線 $x + 2y = 1$（ただし座標軸上の点は除く）の上を動くとき，点 P を f で移動した点 Q の軌跡を求め，図示せよ．

(4)　点 P が直線 $x + 2y = 1$ の上を動くとき，点 P を g で移動した点 Q の軌跡を求め，図示せよ．

（注意）(3)，(4)の図示において，もし漸近線があればそれも書き入れよ．

4

O を原点とする xy 平面上の半円

$$A : x^2 + y^2 = 1 \text{かつ} y \geqq 0$$

の上に異なる 2 点 P，Q をとり，A と直線 PQ で囲まれる領域を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V とする．また，PQ の中点を M とし，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と x 軸の正方向のなす角を α，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のなす角を β とする．ただし，直線 PQ が 2 点 $(-1,\ 0)$，$(1,\ 0)$ を結ぶ直線のとき，$\alpha = \beta = \dfrac{\pi}{2}$ とする．

(1)　実数の定数 a，b に対し，次の等式が成立することを示せ．

$$\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx = -\frac{1}{6}(b-a)^3$$

(2)　直線 PQ の傾きを α を用いて表せ．

(3)　V を $\sin\alpha$，$\sin\beta$ を用いて表せ．

(4)　β を固定して 2 点 P，Q を動かすときの V の最大値 V_1 と最小値 V_2 の差 $W = V_1 - V_2$ を β の関数と考え，W を最大にする β を β_0 とする．このとき $\sin\beta_0$ の値を求めよ．