1 次の文章の空欄に適する数を解答欄に記せ．ただし，分数は既約分数の形で答えよ．

(1) 「2^n を 7 で割ると 1 余る」という性質をもつ最小の自然数 n は $\boxed{\text{ア}}$ である．したがって，2^{12} を 7 で割った余りは $\boxed{\text{イ}}$，2^{2009} を 7 で割った余りは $\boxed{\text{ウ}}$，$2^{2^{2009}}$ を 7 で割った余りは $\boxed{\text{エ}}$ である．ただし，a^{b^c} は「a の b^c 乗」を表す．

(2) A と B が次のようなゲームをする．A はサイコロを 2 回投げて出た目の最大値 a を得点とし，B はサイコロを 1 回投げて出た目 b を得点とし，得点の大きい方を勝ち，同点なら引き分けとする．このとき，$a \leqq 5$ となる確率は $\boxed{\text{オ}}$，$a \leqq 4$ となる確率は $\boxed{\text{カ}}$，B が A に勝つ確率は $\boxed{\text{キ}}$，引き分けとなる確率は $\boxed{\text{ク}}$ である．

(3) O を原点とする数直線上に，点 $P_n(x_n)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を次のようにとる．ただし，x_n は点 P_n の座標を表す．

> $x_0 = 1$ とする．そして，n が偶数なら，線分 OP_n の中点を P_{n+1} とし，n が奇数なら，線分 P_nP_0 1 : 2 に内分する点を P_{n+1} とする．

このとき，$m = 0, 1, 2, \cdots$ に対し，

$$x_{2m+1} = \boxed{\text{ケ}}\, x_{2m}$$
$$x_{2m+2} = \boxed{\text{コ}}\, x_{2m+1} + \boxed{\text{サ}}$$

が成り立つ．したがって，

$$x_{2m+2} = \boxed{\text{シ}}\, x_{2m} + \boxed{\text{ス}}$$

となり，

$$\lim_{m\to\infty} x_{2m} = \boxed{\text{セ}}$$
$$\lim_{m\to\infty} x_{2m+1} = \boxed{\text{ソ}}$$

を得る．

2 座標空間において，点 P は，円 $C_1 : \{(x,\ y,\ z) \mid x^2+y^2=1,\ z=0\}$ 上の点で，原点 O を中心として，点 $(1,\ 0,\ 0)$ から C_1 上を角 θ だけ回ったところにある．ただし，この回転は，z 軸の正の方向からながめたときの反時計回りを正の方向とする．また点 Q は，円 $C_2 : \{(x,\ y,\ z) \mid y^2+z^2=\sin^2\alpha,\ x=0\}$ 上の点で，O を中心として，点 $(0,\ |\sin\alpha|,\ 0)$ から C_2 上を角 $\theta+\alpha$ だけ回ったところにある．ただし，この回転は，x 軸の正の方向からながめたときの反時計回りを正の方向とし，α は定数であり，$\sin\alpha=0$ のときは点 Q は原点 O であるとする．点 P と点 Q の間の距離を ℓ とする．

(1) 点 P の座標と点 Q の座標を，α，θ を使って表せ．（結果のみを記せ．）

(2) ℓ^2 を，α，θ を使って表せ．ただし，θ を一度だけ使う式にすること．

(3) α を定数として，θ が実数全体を動くとき，ℓ^2 の最小値を m，最大値を M とする．m と M を，α を使って表せ．（結果のみを記せ．）

(4) θ が実数全体を動くとき，

(a) つねに $1 \leqq \ell \leqq \sqrt{3}$ となるような α の条件は何か．$\sin\alpha$ の値の範囲として答えよ．

(b) $\ell \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ を満たす θ が少なくともひとつ存在するような α の条件は何か．$\sin\alpha$ の値の範囲として答えよ．

(5) (3)で考えた m が 0 となるような α に対し，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t}\ell\,d\theta$ を求めよ．

（注） xy 平面に対する z 軸の正の方向は，x 軸の正の方向からながめたときの反時計回りに，x 軸を中心軸として $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転すると，y 軸の正の部分が z 軸の正の部分に移るようにとるものとする．

3　xy 平面において，0 でない実数 a に対し，原点 O を焦点，直線 $y = a$ を準線とする放物線を C_a とし，C_a の $x \geqq 0$ を満たす部分を D_a とする．また，$a,\ b > 0$ に対し，2 曲線 D_a，D_{-b} の交点を $\mathrm{P}_{a,\,-b}$ とする．

⑴　$\mathrm{P}_{a,\,-b}$ の座標を求めよ．（結果のみを記せ．）

⑵　$a,\ b > 0$ に対し，2 曲線 D_a，D_{-b} および y 軸で囲まれる領域の面積を求めよ．

⑶　条件

$$0 < r < a \quad \text{かつ} \quad 0 < r < b$$

を満たす $a,\ b,\ r$ に対し，4 曲線 D_{a+r}，D_{a-r}，$D_{-(b+r)}$，$D_{-(b-r)}$ で囲まれる領域の面積を $S(a,\ b,\ r)$ とするとき，$a,\ b > 0$ に対して定義される関数

$$f(a,\ b) = \lim_{r \to +0} \frac{1}{r^2} S(a,\ b,\ r)$$

を求めよ．

⑷　$a,\ b > 0$ が条件 $f(a,\ b) < 4$ を満たして動くとき，点 $\mathrm{P}_{a,\,-b}$ の存在範囲を求め xy 平面上に図示せよ．