1　次の空欄 $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{コ}}$ に適する数を解答欄に記せ．ただし，分数は既約分数の形で答えよ．

平面 P 上に三角形 ABC があり，

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = 5, \quad \mathrm{BC} = 8$$

が成立している．このとき，

$$\cos\angle\mathrm{BAC} = \boxed{\text{ア}}, \quad \sin\angle\mathrm{BAC} = \boxed{\text{イ}}$$

であり，三角形 ABC の面積は $\boxed{\text{ウ}}$，内接円の半径は $\boxed{\text{エ}}$，外接円の半径は $\boxed{\text{オ}}$ である．

この三角形 ABC の周（ただし，3 頂点 A，B，C を除く）を m とする．平面 P 上に点 X をとり，点 X を中心として三角形 ABC を 1 回転するとき（回転角 θ は $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲を動くとする），m が少なくとも 1 回通過する点の全体が作る領域の面積を $S(\mathrm{X})$，m がちょうど 2 回通過する点の全体が作る領域の面積を $S_2(\mathrm{X})$ とする．

たとえば，X を三角形 ABC の頂点 A にとれば，

$$S(\mathrm{A}) = \boxed{\text{カ}}, \quad S_2(\mathrm{A}) = \boxed{\text{キ}}$$

となり，X を三角形 ABC の外心 O にとれば，

$$S(\mathrm{O}) = \boxed{\text{ク}}, \quad S_2(\mathrm{O}) = \boxed{\text{ケ}}$$

となる．また，点 X が線分 OA（両端点を含む）上を動くとき，

$$S(\mathrm{X}) = S(\mathrm{O})$$

を満たす点 X の全体は，長さ $\boxed{\text{コ}}$ の線分となる．

2 次式がすべての実数 x について成り立つとして，以下の問いに答えよ．ここで a，b は定数とする．

$$\int_a^x f(y)\,dy - x^2 - 6x + b = \int_0^a (x^3 + x^2 y) f(y)\,dy$$

問 1　$a = 1$ とするとき，$\int_0^a f(y)\,dy$，$\int_0^a y f(y)\,dy$ の値，および b を求めよ．

問 2　$b = 0$ とするとき，$f(x)$ と a を求めよ．

問 3　$f(x)$ と b がただ 1 組存在するような，a^3 の条件を求めよ．

3　xy 平面上に 2 点 O(0, 0)，A(a, 1) をとり，

$$\mathrm{OP} - \mathrm{AP} = 1$$

を満たす点 P(x, y) の描く軌跡を H_a とする．ただし，a は正の数であり，OP，AP はそれぞれ線分の長さを表す．

問 1　曲線 H_a の方程式を y について解いた形に表し，x の変域（点 P(x, y) が H_a 上を動くとき，x の取り得る値の範囲）を求めよ．

問 2　問 1 で求めた H_a の方程式において，$t = \dfrac{a}{x}$ とおき，y を t と x を用いて表せ．

問 3　a が正の数全体を動くとき，H_a が通過する領域を求め，xy 平面に図示せよ．