1　次の各問いに対し，結果のみを解答欄に記せ．

問 1　xy 平面上の放物線 $C: y = x^2 - x - 2$ の上に 2 点 P，Q をとる．ただし，P の x 座標は Q の x 座標より小さいとする．

(a)　原点 O が線分 PQ の中点となるとき，直線 PQ の方程式を求めよ．

(b)　原点 O が線分 PQ を $2:1$ に内分するとき，直線 PQ の方程式を求めよ．

(c)　原点 O が線分 PQ を $2:1$ に内分するとき，放物線 C と直線 PQ によって囲まれる図形の面積を求めよ．

問 2　n を 3 以上の整数として，$1 \leqq j \leqq n$，$1 \leqq k \leqq n$ を満たす整数 j，k の組 (j, k) の全体（n^2 組ある）の集合を I とする．結果は，できるだけ因数分解した形で記せ．

(a)　組 (j, k) が I 全体を動くとき，積 jk の総和を求めよ．

(b)　組 (j, k) が $j < k$ を満たして I の中を動くとき，積 jk の総和を求めよ．

(c)　組 (j, k) が $j < k - 1$ を満たして I の中を動くとき，積 jk の総和を求めよ．

問 3　実数全体で定義された関数 $f(x) = x^3 - 6x$ を考える．

(a)　$f(x)$ を極小にする x の値を求めよ．

(b)　方程式 $f(x) = a$ を満たす実数 x が 2 つ以上存在するような定数 a の値の条件を求めよ．

(c)　方程式 $f(x) = a$ および不等式 $1 \leqq x \leqq 5$ を満たす実数 x が 2 つ以上存在するような定数 a の条件を求めよ．

2 $0 < \alpha < \pi$ なる α を固定する．O を原点とする xy 平面において，点列 A_0，A_1，A_2，… を，A_k の座標が $\left(\cos\left(-\dfrac{\alpha}{2}+k\alpha\right),\ \sin\left(-\dfrac{\alpha}{2}+k\alpha\right)\right)$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ となるようにとる．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}}$ の成分を $(r\cos\theta_k,\ r\sin\theta_k)$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ とおく．ただし，$r > 0$ とする．

問 1 r，θ_0，θ_1，θ_2 を α を用いて表せ．結果のみを記せ．

問 2 n を正の整数とするとき，等式

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}_0} + \overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1} + \overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1} + \overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2} + \cdots + \overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}_{n+1}}$$

を利用して，和 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos k\alpha$ および和 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin k\alpha$ を求め，n，α を用いて表せ．

問 3 n を正の整数とするとき，和 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos k\alpha\sin k\alpha$ を求め，n，α を用いて表せ．

問 4 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(\alpha\cos k\alpha+\sin k\alpha)^2$ を求め，α を用いて表せ．

3　O を原点とする xyz 空間において，点 $(1,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 2 の球の表面および内部を K_1，点 $(-1,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 2 の球の表面および内部を K_2 とし，空間の 3 点 P，Q，R に対し，

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OY}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}})$$

で定まる点 X，Y を考える．

問 1　P が K_1 を，Q が K_2 をくまなく動くとき，点 X の全体が作る立体の体積を求めよ．

問 2　次の条件を満たす点 R の全体が作る立体の体積を求めよ．
「K_1 に属する任意の P と，K_2 に属する任意の Q に対して，Y は K_1 に属する．」

問 3　次の条件を満たす点 R の全体が作る立体の体積を求めよ．
「K_1 に属する任意の P と，K_2 に属する任意の Q に対して，Y は和集合 $K_1 \cup K_2$ に属する．」