**1**　2 つの行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} a-2 & -1 \\ a^2-2a-4 & 2a-6 \end{pmatrix}$ に対して，以下の各問いに答えよ．解答欄には答えのみを記せ．

**問 1**　行列 $A - kE$ が逆行列をもたないような定数 $k$ の値を求めよ．ただし，$E$ は 2 次の単位行列を表す．

**問 2**　**問 1** で求めた $k$ の値を小さい順に $\alpha$，$\beta$ とするとき，$\alpha P + \beta Q = A$，$P + Q = E$ を満たす行列 $P$，$Q$ を求めよ．

**問 3**　行列の積 $P^2$，$Q^2$，$PQ$，$QP$ を求めよ．

**問 4**　行列 $A$ の $n$ 乗 $A^n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を求めよ．

**問 5**　$a > 0$ として，行列 $C$ を $C = A + B$ と定めるとき，行列 $C - kE$ が逆行列をもたないような定数 $k$ の値がただ 1 つしかないという．このような定数 $k$ および $a$ の値を求めよ．

**問 6**　**問 5** で求めた $k$ を用いて行列 $N$ を $N = C - kE$ と定めるとき，$N^2$ を求めよ．

**問 7**　行列 $C$ の $n$ 乗 $C^n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を求めよ．

**2** 自然数 $m$，$n$ は $2 \leqq m < n$ を満たすとする．

**問 1** 次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\frac{n+1-m}{m(n+1)} < \frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} < \frac{n+1-m}{n(m-1)}$$

**問 2** 次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\frac{3}{2} \leqq \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) \leqq 2$$

**問 3** **問 2** の不等式をより精密にした，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\frac{29}{18} \leqq \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) \leqq \frac{61}{36}$$

**3** 次の各問いに答えよ．

**問 1** $x \geqq 1$，$k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ として

$$I_k(x) = \int \frac{(\log x)^k}{x^2}\,dx$$

とおくとき，$I_0(x)$ を求め，$I_{k+1}(x)$ を $I_k(x)$ を用いて表せ．また $I_4(x)$ を求めよ．

**問 2** $x > 0$ で不等式 $\log x \leqq \dfrac{3}{e}x^{\frac{1}{3}}$ が成り立つことを証明せよ．

**問 3** 関数 $f(x) = \dfrac{(\log x)^2}{x}$ に関する以下の各問いに答えよ．

(a) $y = f(x)$ $(x \geqq 1)$ の極値，極限 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ を調べ，増減表を作り，グラフの概形を描け．解答欄には増減表とグラフの概形のみを記せ．

(b) $n > 1$ として，$y = f(x)$ と 2 直線 $x = n$，$x = n^2$ および $x$ 軸で囲まれる部分 $D_n$ の面積 $S_n$ を求めよ．

(c) $D_n$ を $x$ 軸のまわりに回転して得られる立体の体積 $V_n$ を求めよ．

(d) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{nV_n}{(\log n)S_n}$ の値を求めよ．