1　次の問いの答えのみを解答用紙に記せ．

問 1　トランプのスペードとハートのカードが合わせて 9 枚ある．よく切って 2 枚を同時に取り出す．スペードの枚数を n $(0 \leqq n \leqq 9)$ とするとき，以下の各問いに答えよ．

(1) ハートの出ない確率を n の式で表せ．

(2) ハートとスペードがともに 1 枚ずつ出る確率を n の式で表せ．

(3) ハートの出ない確率が 0.3 以上 0.6 未満で，ハートとスペードがともに 1 枚ずつ出る確率が 0.4 未満であるとき，n の値を求めよ．

問 2　四面体 OABC において

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = \sqrt{3}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 2, \quad \overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 1$$

であるとき，以下の各問いに答えよ．

(1) 辺 AB，BC の長さを求めよ．

(2) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の値を求めよ．

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ．

問 3　a を実数とする．x の 2 次方程式 $(a^2+1)x^2 - 2(a+1)x + a = 0$ の 2 つの解が $\sin\theta$，$\cos\theta$（ただし $0 \leqq \theta \leqq \pi$）であるとき，a と θ の値の組 $(a,\ \theta)$ をすべて求めよ．

2　$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ には，≧ または ≦ が入る．この各々の不等式について，≧ または ≦ を決定し，その証明を与えよ．問 2，問 3 については等号成立条件は述べなくてよい．なお以下に現れる全ての文字，すなわち

$$x,\ k,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ a,\ b,\ c \qquad \text{および} \qquad s_n,\ \alpha_n,\ \beta_n,\ \gamma_n \quad (n=1,\ 2,\ 3)$$

は正の実数をとるものとする．また対数の底は e とする．

問 1　k を定数とするとき，全ての x について

$$\log x - \log k \ \boxed{1}\ \frac{1}{k}(x-k)$$

が成り立つ．

問 2　k を $\alpha a + \beta b + \gamma c$ とおき，問 1 の不等式を利用することにより，次を得る．ただし，$\alpha + \beta + \gamma = 1$ とする．

$$\alpha \log a + \beta \log b + \gamma \log c \ \boxed{2}\ \log(\alpha a + \beta b + \gamma c)$$

問 3　s_1，s_2，s_3 を次で定める：

$$\begin{cases} s_1 = \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c \\ s_1 = \alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c \\ s_3 = \alpha_3 a + \beta_3 b + \gamma_3 c \end{cases}$$

ただし，

$$\sum_{n=1}^{3} \alpha_n = \sum_{n=1}^{3} \beta_n = \sum_{n=1}^{3} \gamma_n = 1, \qquad \alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1\ (n=1,\ 2,\ 3)$$

とする．このとき

$$s_1 s_2 s_3 \ \boxed{3}\ abc$$

が成り立つ．

3　e を自然対数の底とするとき，定積分 $I = \displaystyle\int_0^2 e^{-x^2}\,dx$ の値に関する以下の各問いに答えよ．

問 1　次の 2 つの定積分の値を，I を用いて表し，計算過程を記せ．

(1) $\displaystyle\int_0^2 x^2 e^{-x^2}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^2 x^4 e^{-x^2}\,dx$

問 2　閉区間 $a \leqq x \leqq b$ において，関数 $f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ は微分可能，第 2 次導関数 $f''(x)$ は連続であるとする．このとき不等式

$$\int_a^b \left(\{f(x)\}^2 - \{f'(x)\}^2 + \{f''(x)\}^2\right) dx + \left[\{f(x) + f'(x)\}^2\right]_a^b \geqq 0$$

が成り立つことを示せ（等号成立条件は述べなくてよい）．ただし，関数 $g(x)$ に対して $[g(x)]_a^b$ は $g(b) - g(a)$ を表す．

問 3　不等式

$$I \geqq \frac{4}{5} + \frac{6}{5e^4}$$

が成り立つことを示せ．