

1 次の問いの答えのみを解答用紙に記せ.

問 1 円に内接する四角形 ABCD において, $AB = 1 + \sqrt{3}$, $BC = CD$, $DA = 2$, また $\angle DAB = 60^\circ$ である. 四角形 ABCD の対角線の交点を P, $\angle BCD$ の二等分線と辺 AB との交点を Q, BC と CQ の交点を R とするとき, 以下の各問いに答えよ. なお数値の分母は有理化すること.

- (1) 辺 BD の長さを求めよ.
- (2) $\angle ABD$ の大きさを求めよ.
- (3) 辺 BP の長さを求めよ.
- (4) 三角形 PQR の内接円の半径を求めよ.

問 2 自然数 n に対して, n を 3 で割った余りを a_n , n^2 を 3 で割った余りを b_n とするとき, 以下の各問いに答えよ.

- (1) $\sum_{n=1}^{2016} (a_n + b_n)$ の値を求めよ.
- (2) $\sum_{n=1}^m (a_{n+2} + b_{n+1} + 2a_n) = 2016$ を満たす自然数 m の値を求めよ.

問 3 O を原点とする座標平面上に, 次のような双曲線 C と直線 ℓ_k (k は実数の定数) が与えられているとき, 以下の各問いに答えよ.

$$C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = -1, \quad \ell_k: 3x - 4y + k = 0$$

- (1) C と ℓ_k が接するような k の値を求めよ.
- (2) C 上の点と直線 $\ell_0: 3x - 4y = 0$ の距離の最小値を求めよ.

2 次の関数 $f(x)$ (ただし $x > 0$) に関する以下の各問いに答えよ.

$$f(x) = \int_1^x t(x-t+1)e^{-(x-t+1)^2} dt$$

問1 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

問2 関数 $g(x)$ を $g(x) = \frac{1}{2}(e^{-1} - e^{-x^2})$ とするとき, $f(x)$ と $g(x)$ の $x > 0$ における大小関係を調べよ.

問3 問2 の $g(x)$ に対して, 傾きが $f'(x) - g'(x)$ の $x = \sqrt{2}$ における値に等しく, 点 $(1, 0)$ を通る直線を考えることにより, 不等式

$$0.115 < f(\sqrt{2}) < 0.165$$

が成り立つことを示せ. ただし, $0.367 < e^{-1} < 0.368$, $0.135 < e^{-2} < 0.136$ であることは用いてよい.

3 座標平面上の 2 点 $P(t, t^2)$, $Q(t-5, t^2 - 4t + 2)$ に対して, t が $1 \leq t \leq 3$ の範囲を動くとき, 以下の各問いに答えよ.

問1 線分 PQ を表す直線の方程式および定義域を, t を用いて表せ (答えのみでよい).

問2 線分 PQ が通過する範囲 D を求め, 図示せよ.