1　数列 $\{a_n\}$ が次の式で定められるとき，以下の各問いの答のみを解答用紙に記せ．

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{3a_n + 1} \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots), \qquad a_1 = \frac{1}{2}$$

問 1　a_n を n の式で表せ．

問 2　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k a_{k+1} a_{k+2}$ を n の式で表せ．

問 3　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} a_{n+2}$ の値を求めよ．

2 $\theta = \dfrac{\pi}{7}$ に対して複素数 z を $z = \cos\theta + i\sin\theta$（$i$ は虚数単位）と置くとき，以下の各問いの答えのみを解答用紙に記せ.

問 1 z^7 の値を求めよ.

問 2 $z^6 - z^5 + z^4 - z^3 + z^2 - z$ の値を求めよ.

問 3 $\cos\theta$ を z を用いて表せ.

問 4 $\cos 2\theta$ を z を用いて表せ.

問 5 $\cos 3\theta$ を z を用いて表せ.

問 6 $\cos\theta \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 3\theta$ の値を求めよ.

問 7 $\cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta$ の値を求めよ.

3 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x \to \sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{\pi}}^{x} \frac{(x^2 + \sqrt{\pi} t) e^{t^2}}{(x^3 - \sqrt{\pi} x^2 + \pi x - \pi\sqrt{\pi}) t^2 \log t} \, dt$$

4 大小 2 つのサイコロを振って出た目をそれぞれ m，n とする．$\triangle$OAB において，辺 OA を $m:n$ に内分する点を C，辺 OB を $n:m$ に内分する点を D とし，線分 AD と線分 BC の交点を E とする．また $\triangle$OAB，$\triangle$EAB の面積をそれぞれ S，T とするとき，以下の各問いに答えよ．

問 1 $\dfrac{T}{S}$ を，m，n を用いて表せ．

問 2 $\dfrac{T}{S}$ の最大値を M とするとき M の値を求めよ．また $\dfrac{T}{S} = M$ となる確率を求めよ．

問 3 $\dfrac{T}{S}$ の最小値とそのときの (m, n) の組を求めよ．

5 xy 平面上に，原点を中心とし共通の焦点を持つ 2 つの楕円 A，B がある．これらの長軸はともに x 軸上にあり，それらの長さはそれぞれ $2a$，$2b$（a，b は $a > b > 0$ を満たす定数）である．x 座標が正および負の焦点をそれぞれ F，F$'$ とする．$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ に対して，A，B 上にそれぞれ 2 点 P，Q を，次を満たすようにとる．

$$\angle \mathrm{PFF'} = 2\theta, \qquad \angle \mathrm{QFF'} = \theta, \qquad 2\text{ 点 P，Q の } y \text{ 座標は正}$$

原点と焦点との距離を d（d は $d > 0$ を満たす定数）とし，線分 PF，QF の長さをそれぞれ p，q とするとき，以下の各問いに答えよ．

問 1　p を，a，d，θ を用いて表せ．また q を，b，d，θ を用いて表せ．

問 2　$\dfrac{q}{p}$ が最大値をとるための a，b の条件を求めよ．またその場合の d の値の範囲を，a，b を用いて表せ．

問 3　$\dfrac{q}{p}$ は最小値をとらないことを証明せよ．