

1 a, b, c はいずれも 1 以上 9 以下の自然数とする. 自然数 N を 11 進法で表すと 3 桁の数 $abc_{(11)}$ となり, 13 進法で表すと 3 桁の数 $cab_{(13)}$ となるという. a, b, c の値を求めよ. また N を 10 進法で表せ. 解答欄には答えのみを記入せよ.

2 O を原点とする座標空間において 2 点 $A(3\sqrt{3}-3, 3\sqrt{3}+2, 0)$, $B(6, -6\sqrt{3}-1, 6\sqrt{2})$ と平面 $\alpha: \sqrt{3}x - y - \sqrt{2}z = 1$ がある. また直線 AB と α との交点を P , α に関して B と対称な点を Q とするとき, 以下の各問の答えのみを解答用紙に記入せよ.

問 1 P の座標を求めよ.

問 2 B から平面 α に垂線 BH を下ろすとき, \overrightarrow{BH} を求めよ.

問 3 \overrightarrow{PQ} を求めよ.

問 4 $\cos \angle BPQ$ の値を求めよ.

3 複素数 z に対して

$$\frac{(1+i)(z+3i)}{z+4-i}$$

が実数となるとき, z の動く複素数平面上の図形を図示し, 絶対値 $|z|$ の最大値, 最小値を求めよ.

4 O を原点とする xy 平面において, 次の 2 曲線を考える :

$$C_1 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \quad (x \geq 0, y \geq 0), \quad C_2 : y = -x^3 + \frac{7}{2}x$$

以下の各問いに答えよ. なお答えの数値は有理化すること.

問 1 C_1 と C_2 の交点の x 座標を全て求めよ.

問 2 C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積を求めよ.

5 以下の各問いに答えよ.

問 1 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{\sqrt{n^4 + k^2(n-1)^2}}$$

問 2 すべての自然数 k と $0 \leq x \leq 1$ を満たすすべての実数 x に対して次の不等式が成り立つことを証明せよ.

$$x^k - \frac{k}{6}x^{k+2} \leq \sin^k x \leq x^k$$

ただし $\sin^k x = (\sin x)^k$ ($k = 1, 2, \dots$) とする.

問 3 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left\{ \left(1 + kn^{k-1} \sin^k \left(\frac{1}{n} \right) \right)^{\frac{k}{n^2}} \right\}$$

ただし数列 $\{a_k\}$ に対して

$$\prod_{k=1}^n a_k = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$$

である.