1　数列 $\{a_n\}$ は次を満たしている：

$$a_{n+1} = 2a_n + 3n + 4^n \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots),\qquad a_1 = -6$$

このとき以下の空欄 $\boxed{\text{ア}}$ 〜 $\boxed{\text{シ}}$ に適する 1 以上の整数を解答欄に記入せよ．

問 1　数列 $\{b_n\}$ を $b_n = a_{n+1} - a_n$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義するとき，b_{n+1} を b_n と n を用いて表すと

$$b_{n+1} = \boxed{\text{ア}}\, b_n + \boxed{\text{イ}} \cdot \boxed{\text{ウ}}^{\,n} + \boxed{\text{エ}}$$

である．

問 2　数列 $\{c_n\}$ を $c_n = b_n + 3$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義するとき，c_{n+1} を c_n と n を用いて表すと

$$c_{n+1} = \boxed{\text{オ}}\, c_n + \boxed{\text{カ}} \cdot \boxed{\text{キ}}^{\,n}$$

である．

問 3　数列 $\{a_n\}$ の一般項を n を用いて表すと

$$a_n = \boxed{\text{ク}} \cdot \boxed{\text{ケ}}^{\,n} - \boxed{\text{コ}}^{\,n} - \boxed{\text{サ}}\, n - \boxed{\text{シ}}$$

である．

2 以下の各問いに答えよ．

問 1　関数 $\log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ の導関数を考えることにより，不定積分 $\displaystyle\int \sqrt{x^2+1}\,dx$ を求めよ．なお積分定数は省略してよい．

問 2　xy 平面上の双曲線 $x^2 - y^2 = -1$ $(y > 0)$ と直線 $y = x$ および 2 直線 $x = 0$，$x = t$（ただし $t > 0$）で囲まれる部分の面積 $S(t)$ を求めよ．

問 3　k を実数の定数とする．**問 2** の $S(t)$ に対して $t\ (> 0)$ の関数 $S(t) - k\log t$ が $t \to +\infty$ で収束するための，定数 k に対する必要十分条件を求めよ．また，そのときの極限値を求めよ．

3　O を原点とする座標空間において 1 点 A(0, 0, 4) をとり，点 B(1, 1, 1) を中心とする半径 1 の球面を S とする．S 上の点 P を動かしたときに直線 AP と xy 平面との交点 Q が描く図形を D とする．

問 1　D 上の点 Q の座標を $(x,\ y,\ 0)$ とするとき，x，y の満たす不等式を求めよ．

問 2　x，y，X，Y を実数，i を虚数単位とし，θ は $0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たすとする．複素数平面における点 $z = x + iy$ を，原点を中心として θ 回転した点が $Z = X + iY$ となったとき，x，y を，X，Y，θ を用いてそれぞれ表せ．答えのみでよい．

問 3　D を xy 平面上で原点を中心として θ 回転（ただし $0 < \theta < \pi/2$）して得られる図形を表す X，Y の不等式に XY の項が含まれないように，θ の値を定め，D の面積を求めよ．

4 n を 1 以上の整数とし，p を $0 < p < 1$ を満たす実数とする．白球 n 個，黒球 n 個，合計 $2n$ 個の球が入った袋から球を無作為に取り出す試行を考える．ただし，取り出した球は袋にもどさない．さらに，袋の中の白球は 1 秒経過するごとに確率 p で黒球に変化し，袋の中の黒球と袋から取り出した球は色が変化しないものとする．また，1 以上の整数 N に対し，以下の問題文中で「N 秒後に袋から球を取り出す」とは，袋に $2n$ 個の球を入れてから N 秒後に起こり得る袋の中の球の色の変化が完了した直後に球を取り出すことを意味する．このとき，以下の各問いに答えよ．

問 1 1 秒後，2 秒後に袋から球を 1 個ずつ取り出したとき，取り出した 2 個の球がどちらも白球である確率を求めよ．

問 2 1 秒後，2 秒後，$\cdots$，n 秒後に袋から球を 1 個ずつ取り出したとき，取り出した n 個の球がすべて白球である確率を $P(n)$ とする．一方，別の試行として，色の変化が起こらないものとして，$2n$ 個の球が入った袋から n 個の球を取り出したとき，取り出した n 個の球がすべて白球である確率を $Q(n)$ とする．このとき，以下の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \log\left(\frac{P(n)}{Q(n)}\right)$$

問 3 n 秒後に袋から n 個の球を取り出したとき，取り出した n 個の球がすべて黒球である確率を $R(n)$ とする．このとき，以下の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - R(n)}{n(1-p)^n}$$

ただし，必要ならば $0 < a < 1$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} na^n = 0$ が成り立つことを証明なしに用いてよい．