1　a を $a \neq 0,\ -1$ を満たす実数とする．O を原点とする xy 平面上において次の 2 つの曲線を考える．

$$C_1 : x^2 - y^2 = 1, \qquad C_2 : y = ax^2 - \frac{3}{2a+2}$$

以下の各問いの答えのみを解答欄に記入せよ．

問 1　$a = 1$ のとき，C_1 と C_2 の共有点の座標をすべて求めよ．

問 2　C_1 と C_2 が相異なる 4 点で交わるための a に対する必要十分条件を求めよ．

問 3　C_1 と C_2 が相異なる 4 点で交わるとき，それら 4 点すべてを通る円の中心の座標を a を用いて表せ．また，その円の半径を r とするとき，以下の空欄に適する 1 以上の整数を解答欄に記入せよ．

$$r = \sqrt{\frac{-a^3 - a^2 + \boxed{\text{ア}}\,a + \boxed{\text{イ}}}{a^{\boxed{\text{ウ}}}\left(a + \boxed{\text{エ}}\right)}}$$

n**2**　空間において 1 点 O をとり，相異なる 4 点 P，A，B，C を頂点とする四面体 PABC について考える．四面体 PABC は点 O を中心とする半径が 1 の球に内接しており，三角形 ABC は 1 辺の長さが l の正三角形であると仮定する．

問 1　l の取り得る値の範囲を答えよ．答えのみでよい．

問 2　$s = \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$t = \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおき，点 P から三角形 ABC を含む平面に垂線 PH を下ろす．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ を l，s，t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の 1 次結合で表せ．

問 3　**問 2** において l を固定し，点 P が $2s - t = l^2$ を満たしながら点 O を中心とする半径 1 の球面上を動くとき，四面体 PABC の体積の最大値 $V(l)$ を求めよ．

3　$f(x) = \log(1 + x^2)\ (x > 0)$ とする．また，実数 a，h は

$$0 < a < 1, \qquad 0 < h < 1, \qquad 0 < a + h < 1$$

を満たすとする．以下の各問いに答えよ．

問 1　k を正の実数とする．このとき，以下の不等式が成り立つことを示せ．

$$x - \frac{x^2}{2} \leqq \log(1 + x) \leqq x - \frac{1}{k+1}\,\frac{x^2}{2} \quad (0 \leqq x \leqq k)$$

問 2　各 a，h に対して，以下の等式を満たす $c\ (a < c < a + h)$ がただ 1 つ存在することを示せ．

$$f(a + h) = f(a) + f'(c)h$$

また，d を以下のように定めたとき，c を d を用いて表せ．

$$d = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

問 3　問 2 において a を固定し，c を h の関数と考えて $c(h)$ と書くことにする．また，$\theta(h)$ を以下のように定める．

$$\theta(h) = \frac{c(h) - a}{h}$$

このとき，極限 $\displaystyle\lim_{h \to 0+0} \theta(h)$ を求めよ．ただし，記号 $\displaystyle\lim_{h \to 0+0}$ は $h > 0$ の範囲で h を 0 に限りなく近づけたときの極限を意味する．

4 関数 $f(x)$ は 2 回微分可能で，その 2 次までの導関数 $f'(x)$，$f''(x)$ はいずれも連続とし，すべての実数 x に対して $f''(x) \geqq 0$ を満たすとする．xy 平面上の曲線 $C : y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における法線上に点 $\mathrm{Q}(a,\ b)$ を $\mathrm{PQ} = 1$，$b < f(t)$ を満たすようにとるとき，以下の各問いに答えよ．

問 1 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を求めよ．答えのみでよい．

問 2 a，b を t の式で表せ．答えのみでよい．

問 3 **問 2** の a，b をそれぞれ $a(t)$，$b(t)$ と表すとき，$b'(t) = f'(t)a'(t)$ が成り立つことを示せ．

問 4 T_1，T_2 は $T_1 < T_2$ を満たす実数とする．t が T_1 から T_2 まで変化するときに，2 点 P，Q が描く曲線の長さをそれぞれ $L_{\mathrm{P}}(T_1,\ T_2)$，$L_{\mathrm{Q}}(T_1,\ T_2)$ で表す．$L_{\mathrm{Q}}(T_1,\ T_2)$ と $L_{\mathrm{P}}(T_1,\ T_2)$ の差を $\Delta L(T_1,\ T_2)$ とする：

$$\Delta L(T_1,\ T_2) = L_{\mathrm{Q}}(T_1,\ T_2) - L_{\mathrm{P}}(T_1,\ T_2)$$

このとき次が成り立つことを示せ．

$$\Delta L(T_1,\ T_2) = \int_{T_1}^{T_2} \frac{f''(t)}{1 + \{f'(t)\}^2}\, dt$$

問 5 問 4 までの結果を踏まえて，関数 $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ に対して，$\Delta L(T_1,\ T_2)$ において同時に $T_1 \to -\infty$，$T_2 \to +\infty$ としたときの極限値

$$\lim_{T_1 \to -\infty,\ T_2 \to +\infty} \Delta L(T_1,\ T_2)$$

を求めよ．