1 O を原点とする空間内において 2 点 A，B を OA $= \sqrt{3}$，OB = AB $= \sqrt{2}$ を満たすようにとる．さらに，点 P は以下の条件 $(*)$ を満たしながら空間内を動くものとする．

$(*)$「BP $= \sqrt{2}$，かつ $\angle \mathrm{AOB} = \dfrac{\pi}{3}$，かつ 4 点 O，A，B，P は同一平面上には存在しない．」

点 B から三角形 OAP を含む平面に垂線 BH を下ろす．$0 < x < \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2}$ を満たす各 x に対して，条件 $(*)$ と OP $= x$ を満たす点 P が存在することは認めてよい．以下では $x = \mathrm{OP}$，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく．このとき，以下の $\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{ヒ}}$ に適する 1 以上の整数を解答欄に記入せよ．ただし，有理数は既約分数で表わすこと．

問 1　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{a}\cdot\vec{p}$，$\vec{b}\cdot\vec{p}$ は x を用いてそれぞれ次のように表せる．

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}},\qquad \vec{a}\cdot\vec{p} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}x,\qquad \vec{b}\cdot\vec{p} = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}x^2$$

問 2　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は実数 s，t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = s\vec{a} + t\vec{p}$$

と表せる．このとき，s，t は x を用いてそれぞれ次のように表される．

$$s = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} - \frac{\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}x,\qquad t = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} - \frac{\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}\left(\frac{1}{x}\right)$$

問 3　$|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|^2$ は x を用いて次のように表せる．

$$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2 = \frac{1}{\boxed{\text{ソ}}}\left(-x^2 + \sqrt{\boxed{\text{タ}}}\,x + \boxed{\text{チ}}\right)$$

問 4　点 P が条件 $(*)$ と $\dfrac{1}{3} \leqq \vec{b}\cdot\vec{p} \leqq \dfrac{\sqrt{7}}{4}x$ を満たしながら動くとき，$|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|^2$ は $x = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}}{\boxed{\text{テ}}}$ のとき最大値 $\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ をとり，$x = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ のとき最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ネ}} + \boxed{\text{ノ}}\sqrt{\boxed{\text{ハ}}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$ をとる．

2 n を 1 以上の整数とする．中が見えない n 個の袋があり，それぞれの袋の中には 1 から 5 までの整数がそれぞれ 1 つずつ書かれたカードが 5 枚入っている．これら n 個の各袋からカードを 1 枚ずつ取り出すとき，取り出された n 枚のカードに書かれている数字の和が 3 の倍数である確率を p_n とする．

問 1 p_{n+1} を p_n を用いて表せ．

問 2 $\alpha = \lim_{n\to\infty} p_n$ に対して，不等式

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{2m} \leqq |p_n - \alpha| \leqq \left(\frac{1}{10}\right)^{m}$$

を満たす n の値がちょうど 20 個存在するように 1 以上の整数 m の値を定めることは可能か．可能ならばその値を求め，不可能ならばその理由を説明せよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ であるとする．

3 O を原点とする xyz 空間において，各 θ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ に対し 3 点 P，Q，R を次のように定める．

P$(3^{\frac{1}{4}}(\cos\theta)^{\frac{3}{2}},\ 3^{\frac{1}{4}}(\cos\theta)^{\frac{1}{2}}(\sin\theta),\ \theta)$

Q$(-(\cos\theta)^{\frac{3}{2}},\ (\cos\theta)(\sin\theta)^{\frac{1}{2}},\ \theta)$

R$(0,\ 0,\ \theta)$

θ が 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで動くとき，線分 PQ が通過してできる曲面を K とし，K を z 軸の周りに 1 回転して得られる立体の体積を V とする．

問 1　2 点 P，Q に対して，線分 PQ を $t:(1-t)$（ただし，$0 \leqq t \leqq 1$）に内分する点を S_t とする．t が 0 から 1 まで動くとき，2 点 R，S_t 間の距離の最小値 l を θ を用いて表せ．答えのみでよい．

問 2　次の不定積分を求めよ．ただし，積分定数は省略してよい．答えのみでよい．

$$\int \frac{1}{\sin\theta}\, d\theta$$

問 3　V の値を求めよ．

4 次で定義される関数 $f(s)$ に対して以下の各問いに答えよ．

$$f(s)=\begin{cases}\dfrac{s}{16} & (0 \leqq s \leqq 4),\\ -\dfrac{s}{16}+\dfrac{1}{2} & (4 < s \leqq 8),\\ 0 & (s < 0 \text{ または } 8 < s)\end{cases}$$

問 1　関数 $t=f(s)$ のグラフと，関数 $t=f(s)$ のグラフを s 軸方向に 4 だけ平行移動したグラフを 1 つの st 平面上に図示せよ．答えのみでよい．

問 2　関数 $t=f(s)$ に対して $s \geqq 0$ を定義域とする関数 $t=F(s)$，$t=G(s)$ を次で定義する．

$$F(s)=\int_0^s f(u)\,du, \qquad G(s)=\int_0^s f(u-4)\,du$$

関数 $F(s)$，$G(s)$ をそれぞれ求め，これら 2 つの関数のグラフを 1 つの st 平面上に図示せよ．

問 3　**問 2** で求めた関数 $F(s)$，$G(s)$ に対し，$x=G(s)$，$y=F(s)$ とおく．点 $(x,\ y)$ の描く曲線の概形を xy 平面に図示せよ．

問 4　**問 2** で求めた関数 $F(s)$，$G(s)$ に対し，xy 平面上の 2 点 $(0,\ 1)$ と $(x,\ y)=(G(s),\ F(s))$ の間の距離の最小値を与える s の値を求めよ．