1 以下の文章の $\boxed{\text{ア}}$ 〜 $\boxed{\text{ト}}$ に適する 1 以上の整数を解答欄に記入せよ．

実数の定数 a，b $(a>0)$ に対して，2 次関数 $f(x)=3ax^2+2x+b$ が

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0, \qquad \int_{-1}^{1} \{f(x)\}^2\,dx = 6$$

を満たすとき，$a = \dfrac{\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$，$b = -\dfrac{\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である．

$$\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\pi}$$

$$\int_0^1 \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

$$\int_0^1 x^2\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\pi} - \frac{\boxed{\text{サ}}}{\pi^{\boxed{\text{シ}}}}$$

であることを用いれば，定積分

$$\int_{-1}^{1} \left\{\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - (pf(x)+q)\right\}^2 dx$$

が最小となる定数 p，q の値は $p = \dfrac{\boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}} - \dfrac{\boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}\pi^{\boxed{\text{テ}}}}$，$q = \boxed{\text{ト}}$ となる．

2 O を原点とする xyz 空間において以下の各問いに答えよ．

問 1　点 $\left(1,\ -\dfrac{\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ を通り，ベクトル $\overrightarrow{n} = (-2,\ \sqrt{5},\ \sqrt{3})$ に垂直な平面 α の方程式を求めよ．

問 2　ベクトル $(0,\ 0,\ 1)$ と問 1 の $\overrightarrow{n}$ のなす角を求めよ．

問 3　連立不等式 $z \geqq 0,\ x^2 + y^2 + z^2 \leqq 9$ で表される図形を，問 1 の平面 α によって 2 つの部分に分割するとき，点 $(0,\ 0,\ 3)$ を含む部分の体積を求めよ．

3 正の実数 t，k に対して，座標平面上の点 $\mathrm{T}_t(k)$ を次で定める．

$$\mathrm{T}_t(k)=\left(\frac{k}{1+t^2k^2},\ \frac{tk^2}{1+t^2k^2}\right)$$

また，各 k に対して，t が正の実数全体を動くときの点 $\mathrm{T}_t(k)$ の描く曲線を $C(k)$ とする．このとき，以下の各問いに答えよ．

問 1　次のア〜ウに適する数または式を解答欄に記入せよ．答えのみでよい．

$C(k)$ は点 $\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\right)$ を中心とする，半径が $\boxed{\text{ウ}}$ の円の一部である．

問 2　各 t に対して，点 $\mathrm{T}_t\left(\dfrac{1}{2}\right)$ における $C\left(\dfrac{1}{2}\right)$ の法線を $l_1(t)$，点 $\mathrm{T}_t(1)$ における $C(1)$ の法線を $l_2(t)$ とする．このとき，2 直線 $l_1(t)$，$l_2(t)$ の方程式をそれぞれ求めよ．答えのみでよい．

問 3　問 2 の 2 直線 $l_1(t)$，$l_2(t)$ の交点 $\mathrm{P}(t)$ の座標を求めよ．答えのみでよい．

問 4　t が正の実数全体を動くとき，問 3 で定めた点 P_t が描く曲線は，x 軸上に 2 つの焦点をもつ楕円の一部であることを示し，その焦点の座標，長軸の長さ，短軸の長さをそれぞれ求めよ．

4　初期時刻 0 で白球が 3 個あり，以下の規則で定まる確率に従って球の色が白から黒，または黒から白に変化するものとする．以下では，各時刻 n ($n = 0, 1, 2, 3, \cdots$) での白球の個数を $w(n)$，黒球の個数を $b(n)$ と表し ($w(n) + b(n) = 3$)，また，実数 x は $0 < x < 1$ を満たすとする．

規則 1：　$w(n) = 3$ または $w(n) = 2$ であるとき，時刻 n での各白球は時刻 $n+1$ では $\dfrac{1}{3}$ の確率で黒球となり，$\dfrac{2}{3}$ の確率で白球のままである．また，時刻 n での黒球は時刻 $n+1$ では確率 x で白球となり，確率 $1-x$ で黒球のままである．

規則 2：　$w(n) = 1$ であるとき，時刻 n での白球は時刻 $n+1$ では $\dfrac{2}{3}$ の確率で黒球となり，$\dfrac{1}{3}$ の確率で白球のままである．また，時刻 n での各黒球は時刻 $n+1$ では確率 1 で黒球のままである．

規則 3：　$w(n) = 0$ であるとき，時刻 n での各黒球は時刻 $n+1$ では確率 1 で黒球のままである．

各時刻 n ($n = 0, 1, 2, 3, \cdots$) に対して，$w(n) = 3$ である確率を p_n，$w(n) = 2$ である確率を q_n，$w(n) = 1$ である確率を r_n とする．このとき，以下の各問いに答えよ．

問 1　p_1，q_1 をそれぞれ求めよ．答えのみでよい．

問 2　次の連立漸化式が成り立つように，ア〜エに適する，n に無関係な数または式を解答欄に記入せよ．導出過程についても説明せよ．

$$\begin{cases} p_{n+1} = \boxed{\text{ア}}\, p_n + \boxed{\text{イ}}\, q_n, \\ q_{n+1} = \boxed{\text{ウ}}\, p_n + \boxed{\text{エ}}\, q_n \end{cases} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

次の連立漸化式が成り立つような実数 α，β（ただし，$\alpha < \beta$）の組を求め，x を用いて表せ．答えのみでよい．

$$\begin{cases} p_{n+2} - (\alpha+\beta)p_{n+1} + \alpha\beta p_n = 0, \\ q_{n+2} - (\alpha+\beta)q_{n+1} + \alpha\beta q_n = 0 \end{cases} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

問 3　数列 $\{p_n\}$，$\{q_n\}$ の一般項を関数 $F(x)$，$G(x)$，$H(x)$，$I(x)$ を用い

$$\begin{cases} p_n = F(x)\alpha^n + G(x)\beta^n, \\ q_n = H(x)\alpha^n + I(x)\beta^n \end{cases} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

と表したとき，$F(x)$，$G(x)$，$H(x)$，$I(x)$ を x の関数としてそれぞれ具体的に求めよ．答えのみでよい．

問 4　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{q_n}$ が存在し，かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{q_n} < 1$ が成り立つための x に対する必要十分条件を求めよ．