

1 袋の中に 0, 1, 2, 3 という 1 つの番号が書かれたカードがそれぞれ 2 枚ずつ, 合計 8 枚入っている. この袋からカードを 4 枚続けて取り出す. ただし, 取り出したカードは袋に戻さない. カードに書かれている番号を取り出した順に a, b, c, d とするとき, 以下の各問いに答えよ. 答えのみでよい. 有理数は既約分数で表すこと.

問 1 $abcd = 0$ となる確率を求めよ.

問 2 $ab + bc + cd = 0$ となる確率を求めよ.

問 3 $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ が 5 の倍数となる確率を求めよ.

問 4 $ab^2 + b^2c + cd^2 + d^2a$ が 5 の倍数となる確率を求めよ.

2 以下の文章中の空欄に適する数値や数式を解答欄に記入せよ。なお、**ク** に関してはその導出過程も解答欄に記述せよ。

O を原点とする xyz 空間において、 $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $P(a, b, 0)$ ($a > 0, b > 0$) として、長方形 OAPB を、対角線 OP を軸として 1 回転させる。B は平面 **ア** $x +$ **イ** $y =$ **ウ** 上の中心 (**エ**, **オ**, 0), 半径 **カ** の円周上を動く (以下この円を C とする)。xy 平面に垂直で対角線 OP を含む平面と円 C の交点の 1 つを Q とするとき、線分 AQ の長さは **キ** となる。特に P が

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$$

を満たしながら動くとき、線分 AQ の長さは最小値 **ク** をとる。

3 関数 $f(x) = (\log x)^2 + 2 \log x$ ($x > 0$) に対し, 方程式 $f(x) = 0$ の解のうち最小の値を a とし, $a \leq x \leq t$ における $|f(x)|$ の最大値を $M(t)$ とする. また, 定積分 I を

$$I = \int_a^{\frac{1}{a}} M(t) dt$$

とするとき, 以下の各問いに答えよ.

問 1 $f(x)$ の極小値とそのときの x の値をそれぞれ求めよ. 答えのみでよい.

問 2 a の値を求めよ. 答えのみでよい.

問 3 $M(t)$ を求めよ.

問 4 I の値を求めよ.

4 $i = \sqrt{-1}$ を虚数単位とし, 複素数 z に共役な複素数を \bar{z} で表わす. 原点を O とする複素数平面上において, 次の 3 つの条件で定まる図形を C とする.

$$|z^2 - 1| = 1, \quad \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

C 上の点 $P(z)$ に対して, 点 $Q(\bar{z})$ を通り直線 OQ と垂直な直線を L とし, 直線 OP と直線 L の交点を $A(\alpha)$ とする. また, 点 $B(\beta)$ を, 原点と点 $R(z^2)$ を通る直線上の点であり, かつ, 直線 AB と直線 L が垂直となるようにとる. z の絶対値を r とし, z の偏角を θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) とするとき, 以下の各問いに答えよ.

問 1 θ がとりうる値の範囲を求めよ. また, r を θ の関数として表せ. 答えのみでよい.

問 2 $\cos \theta$, $\sin \theta$ をそれぞれ r の関数として表せ. 答えのみでよい.

問 3 $|\alpha|$ を r の関数として表せ. 答えのみでよい.

問 4 $|\beta|$ を r の関数として表せ.

問 5 点 $P(z)$ が C 上を動くとき, $|z|^2 \left| \frac{z}{\alpha} - 1 \right| \left| \frac{\beta}{\alpha} - 1 \right|$ の最大値と, 最大値をとる複素数 z に対する r の値を答えよ.