1 3 枚の硬貨 X，Y，Z を同時に投げて，表裏を調べるという試行 T を繰り返し行う．座標空間内の動点 P は定点 A$(a,\ b,\ c)$ から出発し，硬貨の表裏に応じて，次の規則にしたがって移動する．

規則 1　X が表の場合は x 軸方向に $+1$，裏の場合は x 軸方向に -1 だけ平行移動する．

規則 2　Y が表の場合は x 軸方向に $+1$，裏の場合は x 軸方向に -1 だけ平行移動する．

規則 3　Z が表の場合は x 軸方向に $+1$，裏の場合は x 軸方向に -1 だけ平行移動する．

このとき，以下の各問いに答えよ．

問 1　はじめに，試行 T を続けて 6 回行ったところ，X，Y，Z が表となった回数はそれぞれ 2，3，4 であり，このとき，P は原点にあったという．a，b，c の値をそれぞれ求めよ．答えのみでよい．

問 2　次に，動点 P を問 1 で定まった定点 A に戻してから，試行 T を続けて 5 回行った．このとき，P が次の集合に属する確率をそれぞれ求めよ．答えのみでよい．ただし，有理数は既約分数で表すこと．

(1)　$\{(x,\ y,\ z)\ |\ z = -1\}$

(2)　$\{(x,\ y,\ z)\ |\ y \leqq 4,\ z = -1\}$

(3)　$\{(x,\ y,\ z)\ |\ x > 2,\ y + z = 2\}$

2　a を実数の定数とする．O を原点とする座標平面において，曲線 $C : y = |x|(6-x)+x$ と直線 $L : y = 5ax + a^4$ の共有点の個数を $N(a)$ とおくとき，以下の各問いに答えよ．

問 1　直線 L が原点を通るような定数 a の値をすべて求めよ．答えのみでよい．

問 2　曲線 C 上の点 $(1,\ 6)$ における C の接線の方程式を求めよ．答えのみでよい．

問 3　$N(a)$ を求めよ．

3　O を原点とする座標平面における放物線 $C : y^2 = 4px\ (p > 0)$ に対して，C の焦点を F，C 上の異なる 2 点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{\alpha^2}{4p},\ \alpha\right)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{\beta^2}{4p},\ \beta\right)$（ただし，$\alpha < 0 < \beta$）における 2 接線の交点を P とする．$C$ と 2 直線 AF，BF で囲まれる部分の面積を S，C と 2 直線 AP，BP で囲まれる部分の面積を T とするとき，以下の各問いに答えよ．

問 1　S を α，β，p を用いて表せ．答えのみでよい．

問 2　T を α，β，p を用いて表せ．答えのみでよい．

問 3　$S = T$ が成り立つとき，$-\dfrac{\beta}{\alpha}$ がとりうる値の範囲を求めよ．

4 a，b を正の定数とする．xy 平面上の 2 つの曲線 $C_1 : y = e^{x^2}$ $(x > 0)$，$C_2 : y = a \log x + b$ $(x > 0)$ に対して，C_1 と C_2 はただ一つの共有点 $(\alpha,\ e^{\alpha^2})$ $(0 < \alpha < 1)$ をもつとする．また，曲線 C_1，C_2，直線 $x = \alpha^{\frac{3}{2}}$ で囲まれた図形を y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を $V(\alpha)$ とする．このとき，以下の各問いに答えよ．

問 1　a，b を α を用いて表せ．答えのみでよい．

問 2　$V(\alpha)$ を α のみを用いて表せ．

問 3　$0 \leqq t \leqq 1$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$-\frac{t^3}{6} \leqq e^{-t} - 1 + t - \frac{t^2}{2} \leqq 0$$

問 4　極限 $\displaystyle\lim_{\alpha \to +0} \frac{V(\alpha)}{\alpha^c}$ が存在し，かつその極限値が正となるような正の定数 c の値を求めよ．また，そのときの極限値を答えよ．ただし，必要ならば $\displaystyle\lim_{x \to +0} x \log x = 0$ であることを証明なしに用いてよい．