1 以下の文中の $\boxed{\text{ア}}$ 〜 $\boxed{\text{サ}}$ に適する 1 以上の整数を解答欄に記入せよ．なお，分数形で解答する場合は，既約分数で答えること．また，根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる 1 以上の整数が最小となる形で答えよ．

i を虚数単位とする．O を原点とする複素数平面上において，中心が O，半径が 2 の円を C とする．C 上の点 $\mathrm{P}(z)$ に対して，複素数平面上の点 $\mathrm{Q}(w)$ を次のように定める．

$$w = \frac{(4+2i)z + 4 - 4i}{z + 2 - 2i}$$

点 $\mathrm{P}(z)$ が C 上を動くとき，点 $\mathrm{Q}(w)$ は複素数 $\alpha = -\boxed{\text{ア}}\,i$ で表される点 $\mathrm{A}(\alpha)$ を中心とし，半径 $r = \boxed{\text{イ}}$ の円上を動く．このとき，$z = w$ を満たす C 上の点 z がただ 1 つ存在し，その点を $\mathrm{B}(\beta)$ とおく．$z \neq \beta$ を満たす点 $\mathrm{P}(z)$ に対して，等式

$$\frac{z-w}{z-\beta} = \frac{z - \boxed{\text{ウ}} - \boxed{\text{エ}}\,i}{z + \boxed{\text{オ}} - \boxed{\text{カ}}\,i}$$

が成り立つことを用いると，点 $\mathrm{P}(z)$ が $z \neq \beta$ かつ $\sqrt{5}\mathrm{PQ} \leqq \mathrm{BP}$ を満たしながら C 上を動くとき，BP は最大値 $\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ と最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$ をとることがわかる．ただし，複素数平面上の 2 点 X，Y に対して，XY は 2 点 X，Y 間の距離を表す．

2　n を 1 以上の整数とし，x，y を 1 以上 n 以下の整数とする．中が見えない 2 つの箱 A，B があり，A には赤球 x 個と白球 $n-x$ 個が，B には赤球 y 個と白球 $n-y$ 個が，それぞれ入っている．どの目も出る確率が $\dfrac{1}{6}$ である 1 つのさいころを 1 回投げて，1 の目が出たら A から 1 球を取り出し，1 以外の目が出たら B から 1 球を取り出すことを考える．その結果，赤球が取り出されたとき，この赤球が A から取り出された確率を p として以下の各問いに答えよ．

問 1　p を求めよ．答えのみでよい．

問 2　$\dfrac{1}{6} \leqq p \leqq \dfrac{2}{7}$ を満たす座標平面上の点 $(x,\ y)$ の個数 $N(n)$ を求めよ．

問 3　**問 2** の $N(n)$ に対して，$N(n) < 2022$ を満たす最大の整数 n を求めよ．

3 a，b を $a > b > 0$ を満たす定数とし，m，k を正の定数とする．O を原点とする座標平面において，楕円 $C : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ に直線 $l : y = -mx + k$ が第 1 象限の点 A で接しているとする．また，O から l に垂線 OH を下ろし，2 直線 OA，OH のなす角を θ とする．ただし，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．このとき，以下の各問いに答えよ．

問 1　点 A の座標を m，a，b を用いて表せ．答えのみでよい．

問 2　線分 OH の長さ h を m，a，b を用いて表せ．答えのみでよい．

問 3　$\sin\theta$ を m，a，b を用いて表せ．答えのみでよい．

問 4　a，b を固定し，正の実数 m を動かすとき，$\sin\theta$ の最大値 $M(a, b)$ を求めよ．

問 5　a，b を，$a > b > 0$ かつ $(a-b)^2 + (b-1)^2 \leqq \dfrac{3}{4}$ を満たすように動かすとき，**問 4** の $M(a, b)$ の最大値を求めよ．

4 関数 $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$ （ただし，$0 \leqq x \leqq 1$）に対して，曲線 $y = f(x)$ と x 軸，y 軸で囲まれた図形を y 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を V とするとき，以下の各問いに答えよ．

問 1　曲線 $y = f(x)$ の凹凸を調べて増減表をかき，グラフの概形をかけ．以上に関しては結果のみを解答欄に記せ．特に，曲線 $y = f(x)$ の変曲点の座標は，

$$\left(\frac{\boxed{\text{ア}} + \sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}},\ \frac{\sqrt{\boxed{\text{エ}} - \boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}}{\boxed{\text{キ}}} \right)$$

となる．$\boxed{\text{ア}}$～$\boxed{\text{キ}}$に適する 1 以上の整数を解答欄に記入せよ．なお，分数形で解答する場合は，既約分数で答えること．また，根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる 1 以上の整数が最小となる形で答えよ．

問 2　V を求めよ．