1 中身がそれぞれ空である白い箱と黒い箱が 1 個ずつある．また，互いに区別のつかない球が十分多くある．1 から 6 の目をもつ 1 つのさいころを 1 回投げるごとに，出た目が偶数であれば白い箱に目の数に等しい個数の球を入れ，出た目が奇数であれば黒い箱に目の数に等しい個数の球を入れる．ただし，1 度箱に入れた球は取り出さない．さいころを 3 回続けて投げたとき，白い箱に入っている球の個数を n_{W}．黒い箱に入っている球の個数を n_{B} として，以下の各問いの空欄に適する 1 以上の整数を解答欄に記入せよ．ただし，分数は既約分数として表すこと．

問 1 $n_{\mathrm{B}} = 4$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である．

問 2 $n_{\mathrm{B}} = 3$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である．

問 3 $n_{\mathrm{W}} = 8$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である．

問 4 $n_{\mathrm{W}} = 8$ という条件の下で，$n_{\mathrm{B}} \neq 0$ となる条件つき確率は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である．

2 O を原点とする xy 平面上の曲線 $C_1 : y = f(x) = \frac{4}{5}x^3 - \frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$ $(-1 \leqq x \leqq 2)$，と曲線 $C_{2,k} : y = g_k(x) = x^3 - \frac{2k+3}{5}x^2 + \frac{2k}{5}x - \frac{2}{5}$ $(-1 \leqq x \leqq 2)$（ただし，k は 0 以上の定数）の共有点の個数を $N(k)$ とおく．このとき，以下の各問いに答えよ．**問 4** については導出過程も記せ．

問 1 $f(x) = 0$ を満たす x（ただし，$-1 \leqq x \leqq 2$）の値をすべて求めよ．答えのみでよい．

問 2 曲線 C_1 の概形を図示せよ．凹凸や変曲点は調べなくてよい．答えのみでよい．

問 3 **問 1** で求めた各 x に対して，$g_k(x)$ の値を求めよ．答えのみでよい．

問 4 $N(k)$ を求めよ．

3　O を原点とする座標空間において，1 辺の長さが 1 である正四面体を OABC とする．$0 < x < 1$ を満たす x に対して，辺 AB を $x : (1-x)$ に内分する点を D とし，辺 BC を $x : (1-x)$ に内分する点を E とする．また，線分 AE と線分 CD の交点を P とおき，直線 OE 上の点 Q を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{BD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BE}}$ となるようにとる．$\triangle$APC の面積を S とし，$\triangle$OAQ の面積を T とする．このとき，以下の各問いに答えよ．**問 4** については導出過程も記せ．

問 1　S を x を用いて表せ．答えのみでよい．

問 2　$|\overrightarrow{\mathrm{OE}}|$ を x を用いて表せ．答えのみでよい．

問 3　$r = x(1-x)$ とおくとき，T を r のみを用いて表せ．答えのみでよい．

問 4　x を $0 < x < 1$ の範囲で動かすとき，$\dfrac{S}{T^2}$ の最小値とそのときの x の値を求めよ．

4 以下の各問いに答えよ．**問 2**，**問 3** については導出過程も記せ．

問 1 次の定積分の値を求めよ．答えのみでよい．

$$\int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{dx}{x^2 + 2x + 4}$$

問 2 $n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ とするとき，$0 < a < 1$ を満たす a に対し

$$I_n = \int_0^a \frac{x^{3n}}{1 - x^3}\, dx$$

とおく．

(1) 次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$0 \leqq I_n(a) \leqq \frac{a^{3n+1}}{(1 - a^3)(3n + 1)}$$

(2) $I_n(a) - I_{n+1}(a)$ を n と a のみを用いて表せ．

問 3 次の無限級数は収束する．その和を求めよ．

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n + 1} \left(\frac{3\sqrt{3} - 5}{4} \right)^n$$