**1** 中が見えない袋 O，A，B がある．袋 O の中には赤玉 2 個，白玉 4 個が入っており，袋 A と袋 B の中には何も入っていない．1 から 6 の目をもつ大小 2 つのさいころを同時に 1 回投げて出た目をそれぞれ $a$，$b$ とするとき，以下の各操作を（操作 1），（操作 2），（操作 3）の順に 1 度ずつ行う．

（操作 1）袋 O の中から無作為に $a$ 個の玉を取り出して，袋 A の中に入れる．

（操作 2）袋 O の中から無作為に $\min\{b,\ 6-a\}$ 個の玉を取り出して，袋 B の中に入れる．ただし，2 つの実数 $x$，$y$ のうち大きくない方の値を $\min\{x,\ y\}$ で表わす．また，$\min\{b,\ 6-a\}=0$ の場合には，袋 O から袋 B への玉の移動は行わない．

（操作 3）$ab$ が 6 の倍数である場合に限り，袋 A の中から無作為に 1 個の玉を取り出して，袋 B の中に入れる．

なお，各操作で取り出した玉はもとに戻さない．以上の操作をすべて終えたとき，袋 A の中に入っている玉の個数を $N_{\mathrm{A}}$，袋 A の中に入っている赤玉の個数を $N_{\mathrm{A,\,R}}$，袋 B の中に入っている玉の個数を $N_{\mathrm{B}}$，袋 B の中に入っている赤玉の個数を $N_{\mathrm{B,\,R}}$ とする．以下の各問いの $\boxed{\text{ア}}$ 〜 $\boxed{\text{ク}}$ に適する 1 以上の整数を求めよ．ただし，分数は既約分数で表すこと．

**問 1**　$N_{\mathrm{A}}=4$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ となる．

**問 2**　$N_{\mathrm{B}}=4$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ となる．

**問 3**　$N_{\mathrm{A}} \geqq 4$ かつ $N_{\mathrm{A,\,R}}=2$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ となる．

**問 4**　$N_{\mathrm{A}}=4$ かつ $N_{\mathrm{A,\,R}}=1$ という条件の下で，$N_{\mathrm{B,\,R}}=1$ となる条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ となる．

**2** O を原点とする複素数平面において，O を中心とする半径 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ の円を $C_1$ とし，$C_1$ 上の点 $\mathrm{P}(z)$ に対して，複素数平面上の点 $\mathrm{Q}(w)$ を次で定義する．

$$w = \frac{z+i}{z+1}$$

ただし，$i$ を虚数単位とする．また，2 点 P，Q を通る直線を $L$ とおき，$L$ 上の任意の点を $R(u)$ とおく．このとき，以下の各問いの $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ソ}}$ に適する実数を求めよ．**問 4** については導出過程も記せ．

**問 1**　点 $\mathrm{P}(z)$ が $C_1$ 上を動くとき，点 $\mathrm{Q}(w)$ の軌跡は中心 $\boxed{\text{ア}} + \boxed{\text{イ}}\,i$，半径 $\boxed{\text{ウ}}$ の円 $C_2$ となる．

**問 2**　$z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ のとき，$L$ 上の任意の点 $R(u)$ は次の直線の方程式を満たす（ただし，複素数 $u$ と共役な複素数を $\overline{u}$ で表わす）．

$$\left(\boxed{\text{エ}} + \boxed{\text{オ}}\,i\right)u + \left(\boxed{\text{カ}} + \boxed{\text{キ}}\,i\right)\overline{u} = 1$$

また，$L$ と**問 1** の $C_2$ の 2 つの交点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$ は $\alpha = \boxed{\text{ク}}$，$\beta = \boxed{\text{ケ}} + \boxed{\text{コ}}\,i$ で与えられる．

**問 3**　$L$ が**問 2** の点 $\mathrm{A}(\alpha)$ を通るための必要十分条件は次のように表せる（ただし，0 でない複素数 $\gamma$ に対して，$\arg\gamma$ は $\gamma$ の偏角を表す）．

$$\arg\left(\frac{z-\alpha}{z-w}\right) = \boxed{\text{サ}} \text{ または } \boxed{\text{シ}} \quad \left(\text{ただし，} 0 \leqq \boxed{\text{サ}} < \boxed{\text{シ}} < 2\pi\right).$$

**問 4**　点 $\mathrm{P}(z)$ が $C_1$ 上を動くとし，かつ $L$ が**問 2** の点 $\mathrm{A}(\alpha)$ を通るとする．これら 2 つの条件を満たす点 $\mathrm{P}(z)$ は全部で $\boxed{\text{ス}}$ 個あり，$\boxed{\text{ス}}$ 個の複素数 $z$ の中で実部の値が最も大きい複素数は $\boxed{\text{セ}} + \boxed{\text{ソ}}\,i$ である．

**3**　平面上の 3 点 O，A，B を，$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = 1$，かつ $0 < \angle\mathrm{AOB} < \dfrac{\pi}{2}$ を満たすようにとる．$\theta = \angle\mathrm{AOB}$ とおく．点 $\mathrm{P_1}$ を点 A とする．$\mathrm{P_1}$ より直線 OB に垂線 $\mathrm{P_1Q_1}$ を下ろし，$\mathrm{Q_1}$ より直線 OA に垂線 $\mathrm{Q_1P_2}$ を下ろし，以下同様にして，点 $\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$，$\mathrm{P_3}$，$\cdots$ を直線 OA 上に，点 $\mathrm{Q_1}$，$\mathrm{Q_2}$，$\mathrm{Q_3}$，$\cdots$ を直線 OB 上に，それぞれとる．また，三角形 $\mathrm{OP}_k\mathrm{Q}_k$ $(k = 1, 2, \cdots)$ の面積を $S_k$ とする．正の実数 $p$，$q$ に対して，関数 $A_p(\theta)$，$B_q(\theta)$，および，$C(\theta)$ を次で定める．

$$A_p(\theta) = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left(\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k\right)^p + \left(\mathrm{Q}_k\mathrm{P}_{k+1}\right)^p\right\}\right)^{\frac{1}{p}},\quad B_q(\theta) = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k\right)^q\right\}^{\frac{1}{q}},\quad C(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} S_k$$

以下の各問いに答えよ．ただし，平面上の相異なる 2 点 X，Y に対して，XY は線分 XY の長さを表す．

**問 1**　$A_p(\theta)$ を $\theta$，$p$ を用いて表せ．答えのみでよい．

**問 2**　$B_q(\theta)$ を $\theta$，$q$ を用いて表せ．答えのみでよい．

**問 3**　$C(\theta)$ を $\theta$ を用いて表せ．答えのみでよい．

**問 4**　次の極限が存在し，かつその極限値が正となるための $p$ に対する必要十分条件を求めよ．また，そのときの極限値も答えること．ただし，記号 $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}$ は $\theta > 0$ の範囲で $\theta$ を 0 に限りなく近づけたときの極限を意味する．

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{A_p(\theta)\cdot B_{\frac{p}{2}}(\theta)}{C(\theta)}$$

**4** $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ とするとき

$$I_n(m)=\lim_{M\to\infty}\left(\int_0^M x^{mn+m-1}e^{-x^m}\,dx\right)$$

と定め，

$$L_m=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{m-1}}\left\{\frac{I_{mn}(m)}{I_n(m)}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

と定める．このとき，以下の各問いに従って，極限 $I_n(m)$ が存在することを示し，また極限値 $I_n(m)$ と $L_m$ を求めることを考える．

**問 1** $x$ を正の実数とするとき，0 以上の全ての整数 $N$ に対して次の不等式が成り立つことを示せ．

$$e^x>\frac{x^N}{N!}$$

**問 2** 以下の(1)〜(3)に答えよ．

(1) 極限 $I_0(m)$ を $m$ を用いて表せ．答えのみでよい．

(2) 極限 $I_n(m)$ の存在を仮定して極限 $I_{n+1}(m)$ が存在することを示し，$I_n(m)$ を用いて $I_{n+1}(m)$ を表せ．

(3) 極限 $I_n(m)$ の存在を示し，$I_n(m)$ を $n$，$m$ を用いて具体的に表せ．

**問 3** $m\geqq 2$ のとき，極限 $L_m$ を $m$ を用いて表せ．