

気象大学校
入学試験問題集

山崎 将司

■確認事項

- 作り始めた。当面は記述式だけ作成する。択一式は必要に応じてになりそう。ただし、択一式は基礎問題練習に利用できそうなので、適宜プリント化するのはアリ。

目次

第 1 章	2026 年度 採用試験問題	5
1.1	択一式	5
1.2	記述式	6
第 2 章	2025 年度 採用試験問題	9
2.1	択一式	9
2.2	記述式	10
第 3 章	2024 年度 採用試験問題	13
3.1	択一式	13
3.2	記述式	14
第 4 章	2023 年度 採用試験問題	17
4.1	択一式	17
4.2	記述式	18
第 5 章	2022 年度 採用試験問題	21
5.1	択一式	21
5.2	記述式	22
第 6 章	2021 年度 採用試験問題	27
6.1	択一式	27
6.2	記述式	28
第 7 章	2020 年度 採用試験問題	31
7.1	択一式	31
7.2	記述式	32
第 8 章	2019 年度 採用試験問題	35

8.1	択一式	35
8.2	記述式	36
第 9 章	2015 年度 採用試験問題	39
9.1	択一式	39
9.2	記述式	40
第 10 章	2014 年度 採用試験問題	43
10.1	択一式	43
10.2	記述式	44
第 11 章	2013 年度 採用試験問題	47
11.1	択一式	47
11.2	記述式	48

第1章

2026年度 採用試験問題

1.1 択一式

1.2 記述式

1 関数 $y = f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が再び微分可能であるとき、 $f'(x)$ を微分したものを第 2 次導関数といい、 $f''(x)$ で表す。さらに、 $f''(x)$ が再び微分可能であるとき、 $f''(x)$ を微分したものを第 3 次導関数といい、 $f'''(x)$ で表す。ここで、 $g(x) = \tan x$ 、 $h(x) = \tan(x^2)$ とする。以下の設問に答えよ。

- (1) 正接の加法定理を用いて、関数 $y = g(x)$ を導関数の定義に従って微分せよ。なお、三角関数の極限に関する公式 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を用いてよい。
- (2) $g'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4$ であることを示せ。また、 $g''\left(\frac{\pi}{3}\right)$ を求めよ。
- (3) $h'\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{8}{3}\sqrt{3\pi}$ であることを示せ。また、 $h''\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)$ を求めよ。
- (4) $H(x) = h\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right) + h'\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)x + \frac{1}{2}h''\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)x^2 + \frac{1}{6}h'''\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)x^3$ とする。
 $H\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)$ を求めよ。

(2026. 気象大学校 (記述式))

2 定数 α, β はいずれも 2 以上 9 以下の整数で $\alpha < \beta$ であるとする. この下で, 各自然数 n に対して次の 3 つの条件をすべて満たすような正の整数 A_n, B_n を考える.

(i) A_n, B_n はいずれも 10 進法で表すと高々 n 桁である. すなわち,

$$0 < A_n \leq 10^n - 1, \quad 0 < B_n \leq 10^n - 1$$

を満たす.

(ii) A_n^2, B_n^2 を 10^n で割った余りがそれぞれ A_n, B_n に等しい. すなわち, $x = A_n, B_n$ としたとき, それぞれの x についてある整数 m が存在して

$$x^2 - x = m \cdot 10^n$$

と表せる.

ここで, a を整数, b を正の整数とし, $\frac{a}{b}$ を超えない最大の整数を p としたとき, a を b で割った余りとは $a - bp$ のことを指す. このとき, 以下の設問に答えよ.

(1) A_1, B_1 がそれぞれただ一つ存在するような α, β の組はただ一通りに定まることを示し, それらの値を求めよ.

以降, α, β は(1)で求めた組の値に固定するものとする.

(2) A_2, B_2 がそれぞれただ一つ存在することを示し, それらの値を求めよ.

(3) A_3 を 100 で割った余りが A_2 であることを示し, さらに, A_3 の値を求めよ.

(4) 任意の自然数 n に対して A_n の値がただ一つ存在することを示せ.

(2026. 気象大学校 (記述式))

3 点 O を中心とする半径 1 の球面上に異なる 2 点 A, B があり, 同じく点 O を中心とする半径 2 の球面上に異なる 2 点 C, D がある. ここで, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$ とおく. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$ が成り立っているとき, 以下の設問に答えよ.

- (1) 2 本の線分 AB, CD が点 O から等しい距離にあることを示せ.
- (2) $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$ を示せ.
- (3) 4 点 A, B, C, D のうちのどの 3 点も同一直線上に無いとき, $\triangle ABC \equiv \triangle BAD$ を示せ.
- (4) $s = \vec{a} \cdot \vec{b}$, $t = \vec{c} \cdot \vec{d}$ とおくとき, 以下の問いに答えよ.
 - (a) s と t の間に成り立つ関係式を示し, st 平面上に点 (s, t) が存在し得る範囲を図示せよ.
 - (b) $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{CD}|$ それぞれを s のみを用いて表し, 取り得る値の範囲を求めよ.
 - (c) 4 点 A, B, C, D が同一平面上に無いとする. s の値を固定したときの四面体 $ABCD$ の体積の最大値を s のみを用いて表せ.
 - (d) (c)の結果について, さらに s の値を動かす, 四面体 $ABCD$ の体積が最大となる s の値を求めよ.

(2026. 気象大学校 (記述式))

第2章

2025年度 採用試験問題

2.1 択一式

2.2 記述式

1 m, n を 0 以上の整数, α, β を実数とし,

$$I(m, n) = \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m (\beta - x)^n dx$$

とする. 以下の設問に答えよ.

- (1) $I(k, 0), I(0, k)$ をそれぞれ求めよ. また, $I(k, 0)$ と $I(0, k)$ の関係式を述べよ. ただし, k は 0 以上の整数とする.
- (2) $I(m, 1), I(1, n)$ をそれぞれ求めよ. また, $\beta = \alpha + 1$ のとき, $I(m, 1) = I(1, n)$ の必要十分条件は $m = g(n)$ の形で表すことができる. $g(n)$ を求めよ.
- (3) $I(m, n)$ を求めよ.
- (4) xy 平面において, 曲線 $y = -x^4 + \frac{10}{3}x^3 - 4x^2 + 2x - \frac{1}{3}$ と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ.

(2025. 気象大学校 (記述式))

2 $|z| < 1$ を満たす複素数 z に対し、複素数からなる数列（複素数列） $\{S_n\}$ を

$$S_1 = 1,$$

$$S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

により定義する。以下の設問に答えよ。ただし、各設問の最終的な解答における式は総和記号 \sum 、極限記号 \lim 、及び省略記号 \cdots を 用いない 形で示すこと。

(1) $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$ の場合について、 S_1, S_2, S_3 を表す点を複素数平面上に図示せよ。また、 S_1 と S_2 を結ぶ線分 S_1S_2 の長さ、 S_2 と S_3 を結ぶ線分 S_2S_3 の長さ、実軸と線分 S_1S_2 のなす角度、及び線分 S_1S_2 と線分 S_2S_3 のなす角度をそれぞれ z を用いて表し、それらを図に書き加えよ。

(2) S_n を z を用いて表せ。

(3) 複素数列 $\{S_n\}$ の極限值を推測し、 $\{S_n\}$ がその値に収束することを示せ。ただし、複素数列 $\{a_n\}$ が a に収束するとは

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a| = 0$$

が成立することをいい、このときの a を $\{a_n\}$ の極限值という。

(4) r を $0 \leq r < 1$ を満たす実数、 θ を $0 \leq \theta < 2\pi$ を満たす実数とするとき、無限級数

$$1 + r \cos \theta + r^2 \cos 2\theta + r^3 \cos 3\theta + \cdots$$

の和を r, θ を用いて表せ。必要であれば、複素数列 $\{a_n\}$ が複素数 $a = \alpha + i\beta$ (α, β は実数) に収束するとき、 a_n の実部は α に収束し、 a_n の虚部は β に収束することを 用いて よい。

(5) $S_0 = 0$ として、複素数平面上の点 $S_0, S_1, S_2, \dots, S_n$ を順次線分で結んで得られる折れ線の長さを L_n とする。 L_n の $n \rightarrow \infty$ での極限を z を用いて表せ。

(6) 複素数 z を、実数 t を用いて $z = t + (1-t)i$ と表す。 t が $0 < t < 1$ の範囲を動くときの $\{S_n\}$ の極限値の軌跡を求め、 z の軌跡及び原点を中心とする単位円と共に複素数平面上に図示せよ。

(2025. 気象大学校 (記述式))

3 xyz 空間において、原点 O を中心とする半径 1 の球面を S とし、球面 S に点 $A(1, 0, 0)$ で接する y 軸に平行な直線の上を動く点 $B(1, t, 0)$ を考える。ただし、 $t > 0$ とする。点 B を通る S の接線のうち、 S に $z > 0$ の領域で接し、かつ z 軸と交わるものを L とする。また、 L と S の接点を C とし、 L と z 軸の交点を D とする。以下の設問に答えよ。

- (1) 点 C の座標を t を用いて表せ。
- (2) 線分 BD の長さを t を用いて表せ。また、その最小値を求めよ。
- (3) 点 C で球面 S に接する平面 M を考える。 M と x 軸、 y 軸との交点をそれぞれ E 、 F とする。三角形 DEF の面積を t を用いて表せ。また、その最小値を求めよ。

(2025. 気象大学校 (記述式))

第3章

2024年度 採用試験問題

3.1 択一式

3.2 記述式

1 1 回引くと景品が 1 個当たるくじを考える。景品は全部で 3 種類あり、いずれも $\frac{1}{3}$ の確率で当たるものとする。

くじを n 回引いて入手した景品が 1 種類, 2 種類, 3 種類である確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n とする (n は自然数)。以下の設問に答えよ。

- (1) a_1, b_1, c_1 を求めよ。
- (2) a_2, b_2, c_2 を求めよ。
- (3) a_3, b_3, c_3 を求めよ。
- (4) $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ それぞれを a_n, b_n, c_n のうち必要なものを用いて表せ。
- (5) a_n, b_n, c_n を求めよ。
- (6) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ を求めよ。

(2024. 気象大学校 (記述式))

2 四面体 OABC において,

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{OC} = \vec{c}$$

とする. また, 3 点 O, A, B を含む平面に点 C から下ろした垂線の足を点 H とする. 以下の設問に答えよ.

(1) $\triangle OAB$ の面積 S を $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, 及び $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を用いて表せ. なお, 導出過程も示すこと.

(2) ベクトル \overrightarrow{OH} を, 実数 s, t を用いて $\overrightarrow{OH} = s\vec{a} + t\vec{b}$ と表す.

(i) s, t を $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, 及び $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{b} \cdot \vec{c}$, $\vec{c} \cdot \vec{a}$ を用いて表せ.

(ii) $|\overrightarrow{OH}|^2$ を $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, 及び $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{b} \cdot \vec{c}$, $\vec{c} \cdot \vec{a}$ を用いて表すとき, (1) で求めた S を用いると

$$|\overrightarrow{OH}|^2 = \frac{P}{4S^2} \quad \left(P \text{ は } |\vec{a}|, |\vec{b}| \text{ 及び } \vec{a} \cdot \vec{b}, \vec{b} \cdot \vec{c}, \vec{c} \cdot \vec{a} \text{ の多項式} \right)$$

の形に整理することができる. P を $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, 及び $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{b} \cdot \vec{c}$, $\vec{c} \cdot \vec{a}$ を用いて表せ.

(iii) $|\overrightarrow{CH}|^2$ を $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{c}|$ 及び $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{b} \cdot \vec{c}$, $\vec{c} \cdot \vec{a}$ を用いて表せ.

(3) 四面体 OABC の体積 V を $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{c}|$ 及び $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{b} \cdot \vec{c}$, $\vec{c} \cdot \vec{a}$ を用いて表せ.

(2024. 気象大学校 (記述式))

3 自然数 m に対して

$$I_m = \int_0^\pi \sin^m x \, dx$$

とし、0 以上の整数 n に対して

$$f(x) = (x^2 - 1)^n$$

$$P_n(x) = \frac{1}{n! \cdot 2^n} f^{(n)}(x)$$

とするとき、以下の設問に答えよ。ただし、 $f^{(k)}(x)$ は $f(x)$ を k 回微分した関数で、 $f^{(0)}(x) = f(x)$ とする。

(1) $\frac{I_{2m+1}}{I_{2m-1}}$ を m を用いて表せ。なお、導出過程も示すこと。

(2) $I_{2m+1} = \frac{2^{2m+1}(m!)^2}{(2m+1)!}$ が成り立つことを示せ。

(3) $k = 0, 1, \dots, n$ に対して

$$\int_{-1}^1 x^k f^{(n)}(x) \, dx = (-1)^k k! \int_{-1}^1 f^{(n-k)}(x) \, dx$$

が成り立つことを示せ。

(4) $n-1$ 次以下の全ての多項式 $Q(x)$ に対して

$$\int_{-1}^1 P_n(x)Q(x) \, dx = 0$$

が成り立つことを示せ。

(5) $0 \leq m \leq n$ を満たす 0 以上の整数 m, n について、 $P_m(x)$ の次数に着目して、

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) \, dx$$

の値を求めよ。

(2024. 気象大学校 (記述式))

第4章

2023年度 採用試験問題

4.1 択一式

4.2 記述式

1 $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\beta = -\sqrt{2} + \sqrt{3}$ として, 数列 $\{a_n\}(n = 1, 2, \dots)$ を $a_n = \alpha^n + \beta^n$ により定める. 以下の設問に答えよ.

- (1) a_2 及び a_4 を求めよ.
- (2) 方程式 $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ が $x = \alpha$ を解にもつような整数 A, B, C, D の値の組を一つ求めよ.
- (3) 5 以上の自然数 n に対して, a_n を a_{n-2}, a_{n-4} を用いて表せ.
- (4) 全ての自然数 m に対して, a_{2m} が整数であることを示せ.
- (5) α^{2022} の整数部分の 1 の位の数を求めよ. ただし, 実数 x の整数部分とは, x を超えない最大の整数を指すものとする.

(2023. 気象大学校 (記述式))

2 e を自然対数の底, n を 2 以上の自然数とする. a_n を等式

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{a_n}{(n+1)!}$$

を満たす数とし, 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = e^x \left\{ 1 + \frac{1-x}{1!} + \frac{(1-x)^2}{2!} + \cdots + \frac{(1-x)^n}{n!} \right\} + \frac{a_n}{(n+1)!} (1-x)^{n+1}$$

で定める. 以下の設問に答えよ. なお, 必要ならば, $2 < e < 3$ であることは用いてよい.

- (1) $f(0)$ 及び $f(1)$ の値を求めよ.
- (2) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を a_n, n, x を用いて表せ.
- (3) 関係式 $a_n = e^c$, $0 < c < 1$ を満たす実数 c が存在することを示せ. さらに, 不等式 $0 < \frac{a_n}{n+1} < 1$ が成り立つことを示せ.
- (4) e が無理数であることを示せ.

(2023. 気象大学校 (記述式))

3 xy 平面上に 2 点 $A(1, 0)$, $B(-1, 0)$ をとり, 曲線 C を楕円 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ の $y > 0$ の部分とする. C 上の点 P における C の接線を l とし, 2 点 A, B から l に下ろした垂線と l との交点をそれぞれ G, H とする. 以下の設問に答えよ.

- (1) $|\overrightarrow{AP}| + |\overrightarrow{BP}|$ の値は, 点 P の位置によらず一定であることを示せ.
- (2) 点 P の座標を (x_0, y_0) とし, ベクトル \vec{m}, \vec{n} を, それぞれ $\vec{m} = (2y_0, -x_0)$, $\vec{n} = (x_0, 2y_0)$ により定める.

(i) \vec{m} は l の方向ベクトル, \vec{n} は l の法線ベクトルであることをそれぞれ示せ.

(ii) (i) の結果より, ベクトル \overrightarrow{BH} は実数 s, t を用いて

$$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BP} + s\vec{m} + t\vec{n}$$

と表すことができる. s, t を x_0, y_0 を用いて表せ. ただし, 分母, 分子がともに x_0 又は y_0 の高々一次式となるような既約分数式の形で表すこと.

(iii) $\cos \angle BPH$ の値を, (ii) で導入した s, t を用いて表せ. さらに, (ii) の結果を使って, その値 ($\cos \angle BPH$) を x_0 を用いて表せ.

(iv) $\angle BPH = \angle APG$ が成り立つことを示せ.

- (3) 直線 AP と直線 BH の交点を Q とする. 点 P が曲線 C 上を動くときの点 Q の軌跡を求めよ.

(2023. 気象大学校 (記述式))

第5章

2022年度 採用試験問題

5.1 択一式

5.2 記述式

1 以下の設問に答えよ.

- (1) $0 \leq t \leq \pi$ のとき, 方程式 $2 \cos 3t + 1 = 0$ を解け.
- (2) 実数 t に対して, $x = \cos t$ とする. $\cos 3t$ を x を用いて表せ.
- (3) (1), (2)の結果を用いて

$$\cos \frac{2}{9}\pi + \cos \frac{4}{9}\pi + \cos \frac{8}{9}\pi, \quad \cos \frac{2}{9}\pi \cos \frac{4}{9}\pi + \cos \frac{4}{9}\pi \cos \frac{8}{9}\pi + \cos \frac{8}{9}\pi \cos \frac{2}{9}\pi$$

の値をそれぞれ求めよ.

- (4) $\theta = \frac{\pi}{9}$ として, 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \sin^2 \theta,$$

$$a_{n+1} = 4a_n(1 - a_n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定める.

- (i) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ. なお, θ を用いて解答してもよい.
- (ii) 数列 $\{b_n\}$ を, $\{a_n\}$ を用いて

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定める. このとき, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ.

(2022. 気象大学校 (記述式))

2 点 O を中心とする半径 r の円 C を考える。以下の設問に答えよ。

(1) 3 点 P, Q, R が C 上を動くとき、 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} \leq 4r^2$ を示せ。また、等号成立条件を求めよ。

(2) C 上の二つの定点 Q, R を、 O, Q, R が同一直線上に並ばないようにとり、 C 上の点 P が、次の条件

(A) 「 P, Q, R が互いに異なり、 $\angle QPR$ は鈍角」

を満たすように動く。線分 QR の中点を M とし、 $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$, $\overrightarrow{PM} = \vec{b}$, $\overrightarrow{QM} = \vec{c}$, $|\vec{a}| = t$ とする。

(i) $|\vec{b}|$ の最小値を r, t を用いて表せ。

(ii) $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}$ を $|\vec{b}|, |\vec{c}|$ を用いて表せ。

(3) C 上の 3 点 P, Q, R が条件(A)を満たしながら動くとする。このとき、 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}$ の最小値を求めよ。また、 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}$ が最小となるときの $\triangle PQR$ の面積を求めよ。

(2022. 気象大学校 (記述式))

3 放物線 L 上を動く点 $P(x_1, y_1)$ の時刻 t における座標が

$$x_1 = t, \quad y_1 = \frac{1}{2}t^2$$

で与えられているとする。以下の設問に答えよ。

(1) 点 P の時刻 t における速度

$$\vec{v} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dy_1}{dt} \right)$$

及び速さ $v(t) = |\vec{v}|$ を求めよ。

(2) 時刻 0 から t までの間に点 P が動いた道のり s は

$$s = s(t) = \int_0^t v(u) du$$

で与えられる。 $s(t)$ の逆関数 $t(s)$ を用いて、 t の関数 $f(t)$ の s を媒介変数とする表示 $f(t(s))$ を得る。このとき、合成関数及び逆関数の微分法を用いると、 $v(t) \neq 0$ のとき、

$$\frac{df}{ds} = \frac{df}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} \frac{df}{dt} = \frac{1}{v(t)} \frac{df}{dt} = \frac{f'(t)}{v(t)}$$

により、 s による f の微分 $\frac{df}{ds}$ の、 t を媒介変数とする表示が得られる。

このことを利用して、ベクトル

$$\vec{p} = \left(\frac{dx_1}{ds}, \frac{dy_1}{ds} \right)$$

を、 t を用いて表せ。また、 $|\vec{p}| = 1$ であること、及び、 \vec{p} と \vec{v} が平行であることを示せ。

(3) ベクトル

$$\vec{q} = \left(\frac{d^2x_1}{ds^2}, \frac{d^2y_1}{ds^2} \right)$$

を、 t を用いて表し、 \vec{q} と \vec{p} が垂直であることを示せ。また、 $\rho(t) = \frac{1}{|\vec{q}|}$ と定めるとき、 $\rho(t)$ を t を用いて表せ。

(4) $t > 0$ とする。放物線 L 上の点 P における法線を N とし、 N 上の点 $Q(x_2, y_2)$ を

$$|\overrightarrow{PQ}| = \rho(t) \text{ かつ } x_2 < x_1$$

を満たすようにとる。このとき、 x_2 と y_2 をそれぞれ t を用いて表せ。また、点 Q の速度

$$\vec{w} = \left(\frac{dx_2}{dt}, \frac{dy_2}{dt} \right)$$

を、 t を用いて表し、 \vec{w} と \vec{v} が垂直であることを示せ。

- (5) 点 P が $t > 0$ の範囲で放物線 L 上を動くときの点 Q の軌跡 C を求め、 L の $x > 0$ の部分と C を座標平面上に図示せよ.

ただし、点 P 、 Q と法線 N の関係が分かるように、適当な点 P を選び、対応する点 Q 、法線 N も併せて図中に示すこと.

(2022. 気象大学校 (記述式))

第6章

2021年度 採用試験問題

6.1 択一式

6.2 記述式

1 数列 $\{a_n\}$ を

$$\begin{cases} a_1 = 1, & a_2 = \sqrt{\frac{1}{2}} \\ a_{n+1} = a_n \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{a_n}{a_{n-1}}} & (n = 2, 3, 4, \dots) \end{cases}$$

により定める。以下の設問に答えよ。

- (1) a_3 を, $\frac{1}{2}$ のみを用いて, 根号を含む式で表せ。
- (2) $0 < \theta \leq \pi$ とする. $\cos \frac{\theta}{2}$ を $\cos \theta$ を用いて表せ。

また, 等式

$$\cos \frac{\theta}{8} \cos \frac{\theta}{4} = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{4 \sin \frac{\theta}{8}}$$

が成り立つことを示せ。

- (3) θ を $0 < \theta \leq \pi$ を満たす定数とし, 数列 $\{\beta_n\}$ を

$$\beta_n = \cos \frac{\theta}{2^{n+1}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により, また, 数列 $\{b_n\}$ を

$$\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_n = \beta_{n-1} b_{n-1} & (n = 2, 3, 4, \dots) \end{cases}$$

により定める。以下の問いに答えよ。

- (i) β_{n+1} を β_n を用いて表せ。
- (ii) $\{b_n\}$ の一般項を θ を用いて表せ。
- (iii) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を θ を用いて表せ。
- (4) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

(2021. 気象大学校 (記述式))

2 $0 \leq a < 1$ を満たす a に対し、座標平面上の 2 点 $A(a, 0)$, $P(1, 1)$ を考える。以下の設問に答えよ。

- (1) 直線 AP の方程式を a を用いて表せ。
- (2) 直線 AP と x 軸のなす角の二等分線のうち、傾きが正のものを l_a とし、 l_a の傾きを m_a とする。このとき、 m_a を a を用いて表せ。
- (3) 点 $B(b, 0)$ ($a < b < 1$) に対し、(2)と同様に、直線 BP と x 軸のなす角の二等分線のうち、傾きが正のものを l_b とし、 l_b の傾きを m_b とする。このとき、極限值

$$\lim_{b \rightarrow a+0} \frac{m_b - m_a}{b - a}, \quad \lim_{b \rightarrow a+0} \frac{bm_b - am_a}{b - a}$$

をそれぞれ a を用いて表せ。

- (4) (2), (3) で定めた 2 直線 l_a, l_b の交点の x, y 座標をそれぞれ $X(b), Y(b)$ とするとき、極限值

$$X = \lim_{b \rightarrow a+0} X(b), \quad Y = \lim_{b \rightarrow a+0} Y(b)$$

をそれぞれ a を用いて表せ。

- (5) a が $0 \leq a < 1$ の範囲を動くとき、(4) で求めた X の取り得る値の範囲を求めよ。
- (6) a が $0 \leq a < 1$ の範囲を動くとき、(4) で求めた X, Y から定まる点 (X, Y) の軌跡を求め、座標平面上に図示せよ。

(2021. 気象大学校 (記述式))

3 d, r, k を正の定数とする。座標平面上において、点 $(t, 0)$ ($0 \leq t \leq d$) を中心とする半径 r の円を C_t とし、 C_t 上の点 A を、図のように点 (t, r) から時計回りに角 kt だけ回転した点と定める。

t を $0 \leq t \leq d$ の範囲で動かしたとき、点 A は点 $(0, r)$ から出発し、 C_t 上を 1 周して点 (d, r) まで移動する。以下の設問に答えよ。

要図版

- (1) k を d を用いて表せ。また、点 A の座標を t, d, r を用いて表せ。
- (2) t を $0 \leq t \leq d$ の範囲で動かしたとき、点 A の軌跡を L とする。 L はある点 P で L 自身と交わっているとする。
 - (i) 点 P が存在するための d, r が満たすべき不等式を与えよ。
 - (ii) 点 P の y 座標が 0 であるとき、 d を r を用いて表せ。
 - (iii) (ii) の条件の下で、 L で囲まれる図形の面積を求めよ。

(2021. 気象大学校 (記述式))

第7章

2020年度 採用試験問題

7.1 択一式

7.2 記述式

1 次の条件で定まる数列 $\{a_n\}$ を考える.

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{S_n S_{n-1}} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

ここで, S_n は $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を表す. 以下の設問に答えよ.

- (1) n を 2 以上の整数とする. S_{n+1} を S_n , S_{n-1} を用いて表せ.
- (2) n を正の整数とする. S_{n+1} を S_n を用いて表せ.
- (3) 全ての正の整数 n に対し, $1 \leq S_n < 2$ が成り立つことを示せ.
- (4) 正の整数 n に対し, $T_n = \frac{1}{2 - S_n}$ とおく. T_{n+1} を T_n を用いて表せ.
- (5) $\{S_n\}$ 及び $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.
- (6) 全ての 2 以上の整数 n に対し,

$$\sum_{k=1}^n k a_k < 2 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{T_k} < 4$$

が成り立つことを示せ.

(2020. 気象大学校 (記述式))

2 図のように、 xy 平面上の原点 O を中心とする半径 1 の円を C 、 C 上の点 P を中心とする半径 a の円を C_P とし、 \overrightarrow{OP} と x 軸のなす角を θ とする。ここで、 a は $0 < a < 1$ を満たす定数とし、 θ は x 軸の正の部分の始線として原点 O を中心に反時計回りに測った角を正の角とする。

θ が $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で変化するとき、 C と C_P の 2 本の共通接線のうち、共通接線と C との接点を Q とし、 \overrightarrow{OQ} と x 軸のなす角 φ が $\varphi > \theta$ を満たすものを l_1 、もう一方の共通接線を l_2 とする。ただし、 φ の符号は θ と同様に定め、 $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ とする。以下の設問に答えよ。

- (1) $\theta = 0$ としたとき、直線 l_1 の方程式を求めよ。
- (2) $x = 1$ 及び $y = 1$ が共に C と C_P の共通接線となるとき、 P の座標と a の値を求めよ。
- (3) 以下、(2) で求めた a の値を a_0 とし、 $0 < a < a_0$ かつ $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ のときを考える。また、 l_1 及び l_2 のうち、 x 軸、 y 軸とも正の部分で交わるものを L とする。
 - (i) θ_1 を、 $0 < \theta \leq \theta_1$ において L が 1 本のみ存在し、 $\theta_1 < \theta < \frac{\pi}{4}$ において L が 2 本存在するように定めるとき、 $\cos \theta_1$ の値を a を用いて表せ。
 - (ii) L と x 軸の交点の x 座標を a 、 θ を用いて表せ。ただし、 L が 2 本存在するときは全て求めること。
 - (iii) l_1 と x 軸、 l_1 と y 軸それぞれの交点を結ぶ線分の長さを d とする。 d を最小にする θ の値を θ_0 とするとき、 $\tan 2\theta_0$ の値を a を用いて表せ。

(2020. 気象大学校 (記述式))

要図版，右上回り込み，20zw 程度

3 m, n を正の整数とし, $2n$ 次の多項式関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{m^n}{n!} x^n (\pi - x)^n$$

により定義する. ここで, π は円周率である. 以下の設問に答えよ.

(1) $0 \leq x \leq \pi$ における $f(x)$ の最大値 M を求めよ. また, 不等式

$$0 < \int_0^\pi f(x) \sin x dx < 2M$$

が成り立つことを示せ.

(2) $f(x)$ の第 k 次導関数を $f^{(k)}(x)$ と表すとき,

$$\left\{ \begin{array}{l} a_k = f^{(k)}(0), \quad b_k = f^{(k)}(\pi) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 2n) \\ I_k = \int_0^\pi f^{(2k)}(x) \sin x dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 2n) \end{array} \right\}$$

を考える. ただし, $f^{(0)}(x) = f(x)$ とする.

(i) $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ に対して, I_k を I_{k+1}, a_{2k}, b_{2k} を用いて表せ.

(ii) $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ に対して, $a_k = 0$ を示せ. また, $k = n+l$ ($l = 0, 1, 2, \dots, n-1$) に対して,

$$a_k = a_{n+l} = (-1)^l \frac{(n+l)!}{n!} {}_n C_l m^n \pi^{n-1}$$

であることを示せ.

(iii) $f(x) = f(\pi - x)$ の関係式が成り立つことを用いて, $k = 0, 1, 2, \dots, 2n$ に対して,

$$b_k = (-1)^k a_k$$

が成り立つことを示せ.

(iv) I_0 を a_k ($k = 0, 1, 2, \dots, 2n$) を用いて表せ.

(3) 次の命題を(1), (2)の結果と以下の事実(a), (b)を用いて示せ.

命題「円周率 π は無理数である。」

(a) a が有理数ならば, $a = \frac{q}{p}$ となる整数 p, q が存在する.

(b) 任意の正の実数 b に対して, 次の不等式を満たす正の整数 n が存在する.

$$\frac{b^n}{n!} < \frac{1}{2}$$

(2020. 気象大学校 (記述式))

第8章

2019年度 採用試験問題

8.1 択一式

8.2 記述式

1 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ b_1 = 1 \end{cases}, \begin{cases} a_{n+1} = 4a_n - b_n \\ b_{n+1} = a_n + 2b_n \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定義する。以下の設問に答えよ。

- (1) a_2, b_2, a_3, b_3 を求めよ。
- (2) a_n, a_{n+1}, a_{n+2} の間に成り立つ関係式を求めよ。
- (3) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
- (4) $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。
- (5) 数列 $\{c_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を $c_n = \frac{a_n}{b_n} - \frac{b_n}{a_n}$ により定める。このとき、極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n c_{n+k}$$

を求めよ。

(2019. 気象大学校 (記述式))

2 平面上の異なる 2 点 A, B の位置ベクトルを \vec{a} , \vec{b} と表す. また, 2 点 A, B を直径の両端とする円を C とする. 以下の設問に答えよ.

- (1) C の中心の位置ベクトル及び半径を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ. また, C の周上の点の位置ベクトルを \vec{r} とするとき, \vec{r} はベクトル方程式

$$(\vec{r} - \vec{a}) \cdot (\vec{r} - \vec{b}) = 0$$

を満たすことを示せ.

- (2) ベクトル \vec{p} , \vec{q} が不等式

$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) \leq 0$$

$$(\vec{q} - \vec{a}) \cdot (\vec{q} - \vec{b}) \leq 0$$

を満たしているとき, $\vec{x} = (1-\lambda)\vec{p} + \lambda\vec{q}$ ($0 \leq \lambda \leq 1$) で定義されるベクトル \vec{x} について

$$(\vec{x} - \vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{b}) \leq 0$$

が成り立つことを示せ.

- (3) C の外部に異なる 2 点 P, Q をとり, その位置ベクトルを \vec{p} , \vec{q} とする. また, 実数 t を用いて

$$\vec{y} = (1-t)\vec{p} + t\vec{q}$$

と表されるベクトル \vec{y} について, 条件

$$(\vec{y} - \vec{a}) \cdot (\vec{y} - \vec{b}) > 0$$

が全ての実数 t について成り立っているとする. このとき, 次の問いに答えよ.

- (i) $(\vec{y} - \vec{a}) \cdot (\vec{y} - \vec{b})$ の最小値, 及び最小値を与える t の値を \vec{a} , \vec{b} , \vec{p} , \vec{q} を用いて表せ.
- (ii) ベクトル \vec{x} を C の内部又は周上の点の位置ベクトルとする. このとき, $|\vec{x} - \vec{y}|$ の最小値を \vec{a} , \vec{b} , \vec{p} , \vec{q} を用いて表せ.

(2019. 気象大学校 (記述式))

3 m, n を正の整数とし, $2n$ 次の多項式関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{m^n}{n!} x^n (\pi - x)^n$$

により定義する. ここで, π は円周率である. 以下の設問に答えよ.

(1) $0 \leq x \leq \pi$ における $f(x)$ の最大値 M を求めよ. また, 不等式

$$0 < \int_0^\pi f(x) \sin x dx < 2M$$

が成り立つことを示せ.

(2) $f(x)$ の第 k 次導関数を $f^{(k)}(x)$ と表すとき,

$$\left\{ \begin{array}{l} a_k = f^{(k)}(0), \quad b_k = f^{(k)}(\pi) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 2n) \\ I_k = \int_0^\pi f^{(2k)}(x) \sin x dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 2n) \end{array} \right\}$$

を考える. ただし, $f^{(0)}(x) = f(x)$ とする.

(i) $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ に対して, I_k を I_{k+1}, a_{2k}, b_{2k} を用いて表せ.

(ii) $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ に対して, $a_k = 0$ を示せ. また, $k = n+l$ ($l = 0, 1, 2, \dots, n-1$) に対して,

$$a_k = a_{n+l} = (-1)^l \frac{(n+l)!}{n!} {}_n C_l m^n \pi^{n-1}$$

であることを示せ.

(iii) $f(x) = f(\pi - x)$ の関係式が成り立つことを用いて, $k = 0, 1, 2, \dots, 2n$ に対して,

$$b_k = (-1)^k a_k$$

が成り立つことを示せ.

(iv) I_0 を a_k ($k = 0, 1, 2, \dots, 2n$) を用いて表せ.

(3) 次の命題を(1), (2)の結果と以下の事実(a), (b)を用いて示せ.

命題「円周率 π は無理数である。」

(a) a が有理数ならば, $a = \frac{q}{p}$ となる整数 p, q が存在する.

(b) 任意の正の実数 b に対して, 次の不等式を満たす正の整数 n が存在する.

$$\frac{b^n}{n!} < \frac{1}{2}$$

(2020. 気象大学校 (記述式))

第9章

2015年度 採用試験問題

9.1 択一式

9.2 記述式

1 自然数 n に対して

$$\begin{cases} (2 + \sqrt{5})^n = a_n + \sqrt{5}b_n \\ (2 - \sqrt{5})^n = a_n - \sqrt{5}b_n \end{cases}$$

を満たす自然数 a_n と自然数 b_n を考える。以下の設問に答えよ。

- (1) 全ての n に対して, a_n と b_n が存在することを証明せよ。
- (2) 数列 $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$ の極限を求めよ。
- (3) 全ての n に対して, $a_n^2 - 5b_n^2 \neq 0$ が成り立つことを証明せよ。
- (4) 仮に, $\sqrt{5}$ が二つの自然数 p と q を用いて $\frac{p}{q}$ と表すことができたとする, (3)より

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{p}{q} \right| \neq 0$$

となる。このことから不等式

$$\frac{1}{b_n q} \leq \left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{b_n^2}$$

が成り立つことを証明せよ。

- (5) (4)の結果を用いて, $\sqrt{5}$ は二つの自然数 p と q を用いて $\frac{p}{q}$ と表すことはできないことを証明せよ。

(2015. 気象大学校 (記述式))

2 座標空間の原点 $O(0, 0, 0)$ に中心がある半径 a と b ($0 < a < b$) の二つの球をそれぞれ A 及び B とする. A の球面上の点 $P(a_x, a_y, a_z)$ で A に接する平面を α とするとき, 以下の設問に答えよ.

- (1) $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{r_A}$ とする. 点 P を中心とし, 平面 α が B を切り取ってできる円を最大の断面とする球を考える. この球の球面を表す方程式を求めよ.
- (2) 平面 α が B の球面から切り取る円周上の点の座標を (l, m, n) とするとき, l と m が満たす関係式を求めよ.
ただし, この問題に限り, $a_x = a_y = a_z = 1$, $b = 2$ とする.
- (3) 点 O を通り, $\overrightarrow{r_A}$ に平行な直線を γ とする. また, B の球面上の点 Q から γ へ垂線を引き, γ との交点を R とする. 線分 OR の長さが u であるとき, 線分 QR の長さを求めよ.
- (4) B は平面 α により二つの部分に分けられている. そのうち A を含まない部分の体積を求めよ.

(2015. 気象大学校 (記述式))

3 曲線 $y = \sin x$ (x は実数) に関する以下の設問に答えよ.

ただし, 曲線 $y = f(x)$ 上の点 A における接線に垂直で点 A を通る直線を, $y = f(x)$ 上の点 A における法線という.

- (1) $y = \sin x$ 上の点 $P(p, \sin p)$ における法線の方程式を求めよ.
- (2) $y = \sin x$ 上の二点 $P(p, \sin p)$, $Q(q, \sin q)$ ($|p| \leq \frac{\pi}{2}$, $|q| \leq \frac{\pi}{2}$, $p \neq q$) における二つの法線が交わる条件を求めよ. また, そのときの交点を $R(r, s)$ とするとき, r, s を p と q を用いてそれぞれ表せ.
- (3) (2)において q を p に近づけた極限を考える. 交点 $R(r, s)$ が存在する条件を求めよ. また, そのときの r, s を p を用いてそれぞれ表せ.
- (4) (3)で求めた r, s について, $\lim_{p \rightarrow 0} |s - ar - b| = 0$ が成り立つように定数 a, b を定めよ.

(2015. 気象大学校 (記述式))

第10章

2014年度 採用試験問題

10.1 択一式

10.2 記述式

1 $0 \leq \theta \leq \pi$ として, $f(\theta) = \cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta$ とおく. 以下の設問に答えよ.

- (1) $f(0)$, $f(\pi)$ の値を求めよ.
- (2) 方程式 $f(\theta) = 0$ を解け.
- (3) 不等式 $f(\theta) \geq 0$ を解け.

(2014. 気象大学校 (記述式))

2 $\triangle OAB$ において, $OA = 8$, $OB = 3$, $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ とし, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とする. 以下の設問に答えよ.

- (1) AB の長さを求めよ.
- (2) $\angle AOB$ の 2 等分線と辺 AB の交点を P とするとき, \overrightarrow{OP} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ.
- (3) $\angle OAB$ の外角の 2 等分線と $\angle OBA$ の外角の 2 等分線の交点を Q とするとき, \overrightarrow{OQ} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ.
- (4) $\angle AOB$ の 2 等分線は点 Q を通ることを示せ.

(2014. 気象大学校 (記述式))

3 実数の定数 a, b に対して, 関数 $f(x) = x^3 - 3ax^2 + bx$ とおく. 以下の設問に答えよ.

- (1) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式を求めよ.
- (2) 点 $P(1, 0)$ から曲線 $y = f(x)$ へ異なる 3 本の接線が引けるような点 (a, b) の範囲を図示せよ.

(2014. 気象大学校 (記述式))

第11章

2013年度 採用試験問題

11.1 択一式

11.2 記述式

1 p を 0 または 1 とし, r を 0 でない実数とする. 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) は

$$a_{n+1} = ra_n + pb_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

の関係を満たしているとする. また, $a_1 = a$ とする. 以下の設問に答えよ.

(1) $p = 0$ のとき, a_n の一般項を a , n , r を用いて表せ.

(2) $p = 1$ のとき, a_n の一般項は

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = \left(a + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k}{r^k} \right) r^{n-1} \quad (n \geq 2) \end{cases}$$

で与えられることを証明せよ.

(3) $p = 1$ とするとき, 次の問い(i), (ii)に答えよ.

(i) $\{b_n\}$ が初項 b , 公比 $s \neq 0$ の等比数列であるとき, a_n の一般項を a , b , n , r , s を用いて表せ.

(ii) $\{b_n\}$ が初項 b , 公差 $d \neq 0$ の等差数列であるとき, a_n の一般項を a , b , d , n , r を用いて表せ.

(2013. 気象大学校 (記述式))

2 空間座標において、原点 O に関する点 $A(a_1, a_2, a_3)$ の位置ベクトル \overrightarrow{OA} を \vec{a} と表す。このとき、以下の設問に答えよ。

- (1) $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 = 0$ のとき、点 A を通り、 xy 平面上で \vec{a} に垂直な直線と x 軸、 y 軸によって囲まれた三角形の面積を a_1, a_2 を用いて表せ。
- (2) $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$ のとき、点 A を通り、座標空間内で \vec{a} に垂直な平面と xy 平面、 yz 平面及び zx 平面によって囲まれた立体の体積 V を a_1, a_2, a_3 を用いて表せ。
- (3) (2)で $|\vec{a}| = 1$ を満たしながら点 A の座標が変化するとき、 V を最小にする点 A の座標と V の最小値を求めよ。
- (4) 次の問いに答えよ。

- (i) 零ベクトルではない二つのベクトルを \vec{p}, \vec{q} とする。 t が実数全体を動くとき、ベクトル方程式

$$\vec{r} = \vec{p} \sin t + \vec{q} \cos t \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

を満たす点の集合が原点 O を中心とする円となるために \vec{p} と \vec{q} が満たすべき関係式を求めよ。

- (ii) ここでは、 $|\vec{a}| = 1$ とは限らないとする。 $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$ のとき、点 A を通り、 \vec{a} に垂直な平面内で、点 A を中心とする半径 1 の円のベクトル方程式を(i)の $\textcircled{1}$ のように媒介変数 t を含む式で表せ。

(2013. 気象大学校 (記述式))

3 正の実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ が存在して、以下の条件(a), (b), (c)を満たしているとする.

- (a) $f(x)$ は何回でも微分可能である.
 (b) 任意の正の実数 a, b に対して, $f(a+b)\{f(a)+f(b)+1\} = f(a)f(b)$ を満たす.
 (c) $a \rightarrow +0$ のとき, $f(a)$ は正の無限大に発散する. すなわち, $\lim_{a \rightarrow +0} f(a) = +\infty$

このとき、以下の設問に答えよ.

(1) さらに、条件(d)が満たされているとすると、次の問い(i)~(iv)に答えよ.

(d) 任意の正の実数 a に対して $f(a) > 0$

- (i) xy 平面において、曲線 $y = f(x)$ と x 軸、直線 $x = \sin t$ (ただし, $0 < x < \frac{\pi}{2}$), $x = 1$ で囲まれる図形の面積を $S(t)$ とするとき、 $S(t)$ の導関数 $\frac{dS(t)}{dt}$ を $f(\sin t)$ を含む式により表せ.
- (ii) $f(2x)$ を $f(x)$ を用いて表せ. また, $f(x)$ を $f(2x)$ を用いて表せ.
- (iii) $a > b$ となる任意の正の実数 a, b に対して, $f(a) < f(b)$ であることを証明せよ.
- (iv) 導関数の定義から, m を負の定数として,

$$\frac{df(x)}{dx} = mf(x)\{f(x)+1\}$$

が成り立つことを証明せよ.

(2) 条件(d)は必ずしも満たされていないとする. 関数 $f(x)$ の値域は $-1 < f(x) < 0$ の範囲を含まないことを証明せよ.

(2013. 気象大学校 (記述式))