平　成　　9　　年　度
医学部前期入学試験問題

数　　　学

（時間：120 分）

注　意　事　項

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません．
2　試験中に問題冊子の印刷不鮮明および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい．
3　解答は，すべて解答用紙の所定の欄に記入しなさい．
4　問題冊子の余白は，計算等に用いて構いません．
5　試験終了後，解答用紙のみを回収します．

1 次の各問に対し，答えだけを書け．

(1) ベクトル $\overrightarrow{a} = (x^2-1,\ x-5,\ -x-1)$ が 2 つのベクトル $\overrightarrow{b} = (x,\ x+1,\ -1)$，$\overrightarrow{c} = (x+1,\ 2x-3,\ x)$ と直交するとき，x の値と $\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ のなす角 θ を求めよ．ただし，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ とする．

(2) 不等式 $x^2+y^2 \leqq |x| \leqq 1-y$ を満たす点 $(x,\ y)$ が存在する領域の面積を求めよ．

(3) 等差数列がある．初項は 1 で，第 6 項は 19 より大きく，第 9 項は 31 より小さく，ある項は 100 である．第 31 項を求めよ．

(4) xy 平面上を動く点 P の時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が $x = \dfrac{t^3}{3}$，$y = t^2$ で与えられている．点 P が時刻 $t=0$ から $t=\sqrt{5}$ までの間に通過する道のりを求めよ．

2 四面体 OABC において，$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = 2$，$\mathrm{OC} = 1$，$\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{BOC} = \angle\mathrm{COA} = \dfrac{\pi}{3}$ とする．辺 OA 上の点 P を $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となるようにとり，三角形 OBC の内部に点 Q を内積 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ がともに 0 となるようにとる．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を x，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ．

(2) x が $0 < x < 1$ の範囲を動くとき，四面体 BCPQ の体積の最大値と，その最大値を与える x の値を求めよ．

3 a，b は定数で $a > 1$ とし，関数 $f(x) = \dfrac{x+b}{x^2+2x+a}$ の極大値，極小値を与える x の値をそれぞれ x_1，x_2 とする．

(1) x_1，x_2 を求めよ．

(2) $(x_1+1)f(x_1)$，$(x_2+1)f(x_2)$ は a，b に無関係な値をとることを示せ．

(3) $f(x)$ の極大値が $1+\sqrt{3}$，極小値が $1-\sqrt{3}$ であるとき，a，b の値を求めよ．

4 n を自然数とし，$a_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin x \cos 2x \cos nx\, dx$ とおく．

(1) a_n を n が奇数の場合と偶数の場合に分けて求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} na_n$ を求めよ．