平　成　13　年　度
医学部前期入学試験問題

数　　学

（時間：120 分）

注　意　事　項

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません．
2　試験中に問題冊子の印刷不鮮明および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい．
3　解答は，すべて解答用紙の所定の欄に記入しなさい．
4　問題冊子の余白は，計算等に用いて構いません．
5　試験終了後，解答用紙のみを回収します．

1 次の問いに対して，答えだけを書け．

(1) 曲線 $y = x^3 + 2x^2 - 3x - 8$ と曲線 $y = x^2 + x - 4$ の 3 つの交点を頂点とする三角形の面積を求めよ．

(2) 正三角形 OAB がある．実数 s，t に対して点 P，Q は，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を満たしている．$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が垂直となるとき，s を t の式で表せ．

(3) $90^\circ \leqq x < 180^\circ$ のとき，関数 $y = \dfrac{2\sin 4x + \sin 3x}{\sin x}$ の最大値を求めよ．

(4) a，b を正の整数とする．複素数 $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ に対して，$(az + bz^2 + 1)(az^2 + bz + 1) = 12$ となるような a，b の値を求めよ．ただし，i は虚数単位である．

2 次の問いに答えよ．ただし，対数は自然対数とする．

(1) $x \geqq 0$ のとき，$x - \dfrac{x^2}{2} \leqq \log(1 + x) \leqq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$ が成り立つことを示せ．

(2) t は正の定数とする．曲線 $y = \log x$ を C とし，C 上の 2 点 $(t,\ \log t)$，$(t + 1,\ \log(t + 1))$ を結ぶ直線を ℓ として，C と ℓ で囲まれる図形の面積を $S(t)$ とする．(1)を利用して，$\displaystyle\lim_{t\to\infty} tS(t)$ を求めよ．

3 p，q は $0 < p < 1$，$0 < q < 1$ を満たす実数とし，行列 $A = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$，$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，$A - E$ は逆行列をもたないとする．A の n 個の積 A^n を，$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ とおくとき，

(1) q を p の式で表せ．

(2) a_{n+1}，b_{n+1} を p，a_n，b_n の式で表せ．

(3) A^n を p，n の式で表せ．

4 a を正の定数とし，曲線 $y = e^{ax}$ を C とする．C 上の 2 点 $\mathrm{P}(0,\ 1)$，$\mathrm{Q}(t,\ e^{at})$ $(t \neq 0)$ に対して，P における C の法線を ℓ_{P}，Q における C の法線を ℓ_{Q} とし，ℓ_{P} と ℓ_{Q} の交点を R とする．ただし，e は自然対数の底である．また，点 A における C の法線とは，A を通り A における C の接線に垂直な直線のことである．

(1) R の座標を求めよ．

(2) t が限りなく 0 に近づくとき，R はある点 R_0 に限りなく近づく．R_0 の座標を求めよ．

(3) (2)の R_0 に対して，線分 PR_0 の長さを最小にする a の値を求めよ．