平　成　14　年　度
医学部前期入学試験問題

数　　学

（時間：120 分）

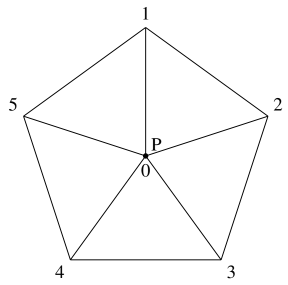
注　意　事　項

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません.
2　試験中に問題冊子の印刷不鮮明および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい.
3　解答は，すべて解答用紙の所定の欄に記入しなさい.
4　問題冊子の余白は，計算等に用いて構いません.
5　試験終了後，解答用紙のみを回収します.

1 次の問いに対して，答えだけを書け．

(1) 放物線 $y = x^2 + k$ と楕円 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ が 2 点で接するときの k の値と接点の座標を求めよ．

(2) 右図のように正五角形の重心と頂点に 0 から 5 の番号を付ける．1 つのサイコロを投げ，出た目に応じて各頂点と重心の上を移動する点 P がある．点 P が各頂点に位置しているとき，1 か 2 か 3 の目が出たならば時計回りに 1 つ隣の頂点に移り，4 か 5 の目が出たならば反時計回りに 1 つ隣の頂点に移り，6 の目が出たならば重心に移るものとする．また，点 P が重心に位置しているとき，1 から 5 の目が出たならばその数字の付いた頂点に移り，6 の目が出たならば重心に留まるものとする．重心を出発点とし，3 回サイコロを投げたあと，点 P が重心に位置している確率を求めよ．



(3) 原点を O とする平面上の 2 点 $\mathrm{A}(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$，$\mathrm{B}(4,\ 0)$ に対して，点 P は $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{r}{8}\cos\theta\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たしている．r，θ が $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$ を満たしながら $0 \leqq r \leqq 4$，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，点 P の軌跡の方程式を求めよ．ただし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の内積を表す．

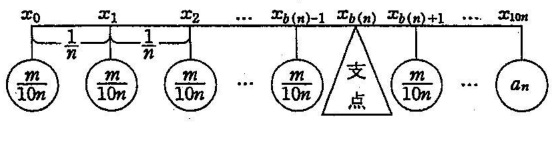
(4) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \log(1 + x^2)\,dx$ を求めよ．ただし，対数は自然対数とする．

2 複素数 $w = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ がある．複素数 z_0 に対して $z_1 = wz_0 - 1$，$z_2 = wz_1 - 1$ とし，複素数平面上で z_0，z_1，z_2 を表す点をそれぞれ A_0，A_1，A_2 とする．ただし，i は虚数単位である．

(1) z_0 が $\dfrac{1}{w-1}$ と異なるとき，三角形 $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ は正三角形となることを示せ．

(2) 3 点 A_0，A_1，A_2 が複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円の周上または内部に含まれるように複素数 z_0 を動かす．このとき，点 A_0 が動きうる範囲の面積を求めよ．

3 m は正の定数，n は自然数，$b(n)$ は $5n < b(n) < 10n$ を満たす自然数とする．下図のように，長さ 10 の天秤棒を $10n$ 等分する点と端点を x_0，x_1，$\cdots\cdots$，x_{10n} とする．各点 $x_i\ (i = 0, 1, \cdots\cdots, b(n)-1, b(n)+1, \cdots\cdots, 10n-1)$ の位置に重さ $\dfrac{m}{10n}$ の重りをつるし，点 x_{10n} の位置には重さ a_n の重りをつるしたところ，点 $x_{b(n)}$ を支点として釣り合った．ただし，棒の重さは考えないものとする．ここで，天秤が釣り合うとは，「支点から重りをつるした位置までの距離」と「重りの重さ」の積を支点の右側と左側においてそれぞれすべて加えた和が等しくなることである．



(1) a_n を m，n，$b(n)$ で表せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{b(n)}{n} = l$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を m，l で表せ．

4 a は $0 < a < 1$ を満たす定数として，関数 $f(x) = \sin(x - a\pi \cos x)$ を考える．

(1) 曲線 $y = f(x)$ は直線 $x = \dfrac{\pi}{2}$ に関して対称であることを示せ．

(2) $0 < x < \pi$ の範囲で，関数 $y = f(x)$ の極大値の個数と極小値の個数を求めよ．

(3) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$，$J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)dx$ とする．$a = \dfrac{1}{3}$ のとき，$I - J$ の値を求めよ．