平　成　15　年　度
医学部前期入学試験問題

数　　学

（時間：120 分）

注　意　事　項

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません．

2　試験中に問題冊子の印刷不鮮明および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい．

3　解答は，すべて解答用紙の所定の欄に記入しなさい．

4　問題冊子の余白は，計算等に用いて構いません．

5　試験終了後，解答用紙のみを回収します．

1

次の問いに対して，答えだけを書け．

(1) 方程式 $x^2-2x-1=0$ の2つの解 α，β と実数 y に対して，$A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ -\beta & y\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}\beta & \alpha \\ -\alpha & y\end{pmatrix}$ とおく．$AB=BA$ となる y の値を求めよ．

(2) 自然数 k に対して，$a_k=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos kx\,dx$ とおく．$\displaystyle\sum_{k=1}^{200}k^3a_k$ を求めよ．

(3) 曲線 $11x^2-24xy+4y^2=20$ を C とする．直線 $y=3x$ に関して C と対称な曲線の方程式を求めよ．

(4) x の関数 $f(x)=(1-2\sin\theta)x^3+3(1-2\cos\theta)(x^2+x)$ が極小値をもつ θ の値の範囲を求めよ．ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする．

2

1辺の長さが1の正四面体OABCにおいて，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする．線分ABを $1:2$ に内分する点をL，線分BCの中点をM，線分OCを $t:1-t$ に内分する点をNとする．さらに，線分AMと線分CLの交点をPとし，線分OPと線分LNの交点をQとする．ただし，$0<t<1$ である．

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ の値を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(3) 三角形QOCの面積と三角形QAMの面積が等しくなる t の値を求めよ．

3

$f(x)=\log(x+\sqrt{x^2+1})$ に対して，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式を $y=g(x)$ とする．ただし，$a>0$ とし，対数は自然対数とする．

(1) すべての $x\geqq 0$ に対して，$f(x)\leqq g(x)$ が成り立つことを示せ．

(2) 曲線 $y=f(x)$ と接線 $y=g(x)$ および y 軸で囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ．

(3) (2)の $S(a)$ に対して，$\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{S(a)}{a^4}$ を求めよ．

4

表に0, 裏に1と書かれた1枚の硬貨を投げる試行を $n+3$ 回繰り返す．k 回目に出た数を x_k とし，$X_k=\begin{pmatrix}x_k & x_{k+1} \\ x_{k+2} & x_{k+3}\end{pmatrix}$ により行列 X_k $(k=1,2,\cdots\cdots,n)$ を定める．ただし，n は6以上の整数とし，硬貨の表と裏の出る確率は等しいものとする．

(1) X_1，X_2，X_3 の逆行列がすべて存在する確率を求めよ．

(2) $X_1=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$，$X_n=\begin{pmatrix}1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ となり，X_2，X_3，$\cdots\cdots$，X_{n-1} の逆行列がすべて存在する場合について，以下の問いに答えよ．

(i) $n=7$ のとき，このような行列の組 $\{X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5,\ X_6,\ X_7\}$ は何通りあるか．

(ii) 行列の和 $X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n$ の4つの成分が等しいことを示せ．また，その成分がとりうる最小の値を n を用いて表せ．