平　成　16　年　度
医学部前期入学試験問題

数　　学

（時間：120 分）

注　意　事　項

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません．

2　試験中に問題冊子の印刷不鮮明および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい．

3　解答は，すべて解答用紙の所定の欄に記入しなさい．

4　問題冊子の余白は，計算等に用いて構いません．

5　試験終了後，解答用紙のみを回収します．

1 次の問いに対して，答えだけを書け．

(1) すべての実数 x，y について $(x \quad y)\begin{pmatrix} a & 5a-2 \\ 2-a & 3a+2 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \geqq 0$ が成立するような実数 a の値の範囲を求めよ．

(2) 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 上の点 $(\sqrt{2},\ 1)$ における接線を l_1 とし，双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ の 2 本の漸近線を l_2，l_3 とする．3 本の直線 l_1，l_2，l_3 によって囲まれる図形の面積を求めよ．

(3) $\displaystyle\sum_{k=3}^{7} a_k = 20$，$\displaystyle\sum_{k=4}^{7} {a_k}^2 = 120$ を満たす等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．ただし，公差は正数とする．

(4) x，y は $\sin x + y\cos x = y$ を満たす実数とする．y が $2 \leqq y \leqq 3$ の範囲で変化するとき，$\cos x$ のとりうる値の範囲を求めよ．

2 z_0 は $-1 < z_0 < 1$ を満たす実数とする．複素数平面上の 4 点 $\mathrm{P}_0(z_0)$，$\mathrm{P}_1(z_1)$，$\mathrm{P}_2(z_2)$，$\mathrm{P}_3(z_3)$ が，この順に時計回りの正方形の頂点になっている．ただし，P_1 は原点を中心とする半径 1 の円周 C_1 上にあるものとする．

(1) z_2，z_3 を z_0，z_1 を用いて表せ．

(2) 2 点 P_2，P_3 の中点を Q とする．P_1 が C_1 上を動くとき，Q の描く図形 C を求めよ．

(3) (2)で求めた図形 C と C_1 が共有点をもたないように，実数 z_0 の値の範囲を定めよ．

3 a を $0 \leqq a < \dfrac{\pi}{2}$ とし，$I(a) = \displaystyle\int_0^a (\cos x)\log(\cos x)\,dx$ とおく．ただし，対数は自然対数とする．

(1) $I(a)$ を求めよ．

(2) $0 < x < 1$ の範囲で不等式 $-1 < \sqrt{x}\log x < 0$ が成り立つことを示せ．また，これを用いて $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x = 0$ であることを示せ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{a\to\frac{\pi}{2}-0} I(a)$ を求めよ．

4 m，n，r は $m < n$，$m+n = 2r$ を満たす自然数とする．赤玉 m 個と白玉 n 個が入っている袋から，よくかき混ぜて玉を同時に r 個取りだすとき，赤玉がちょうど k 個含まれる確率を p_k $(k = 0, 1, 2, \cdots\cdots, r)$ とおく．

(1) p_k を m，n，r，k を用いて表せ．

(2) p_k が最大となる k を m を用いて表せ．

(3) 関数 $f(x) = (1+x)^m$ とおくと，二項定理より $f(x) = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{m} {}_m\mathrm{C}_k x^k$ である．このことを利用して，x の多項式 $(1+x)^n f'(x)$ の x^{r-1} の係数を比較することにより，$\displaystyle\sum_{k=1}^{r} kp_k = \dfrac{m}{2}$ が成り立つことを示せ．ただし，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数である．