

平成 17 年度
医学部前期入学試験問題

数 学

(時間：120分)

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 試験中に問題冊子の印刷不鮮明および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 解答は、すべて解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
- 4 問題冊子の余白は、計算等に用いて構いません。
- 5 試験終了後、解答用紙のみを回収します。

1 次の問いに対して、答えだけを書け.

- (1) z を絶対値 1, 偏角 75° の複素数とし, 複素数平面上で, $2z, 4z^2, \frac{2}{z^2}$ を表す点をそれぞれ A, B, C とする. 三角形 ABC の面積を求めよ.
- (2) 1 と 400 の間にある 3 の倍数で, 連続する 2 つの自然数の積に分解できるものの和を求めよ.
- (3) 曲線 $C: (x+2y-2)^2 - 4(y+1) = 0$ 上を動く点 $P(x, y)$ について, $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 24 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ で定まる点 (X, Y) を Q とする. 点 Q の軌跡を求めよ.
- (4) a を正の実数とする. 方程式 $3x^2 - 6ax - 2a^2 + 13a - 3 = 0$ が異なる 2 つの実数解 α と β をもち, $\log_a(a^3 + \beta^3) = 2$ となるような a の値を求めよ.

2 正方形 ABCD を底面とし, すべての辺の長さが 1 の四角すい OABCD がある. 辺 OA を $t:1-t$ ($0 < t < 1$) に内分する点を P とし, P から辺 BC と辺 CD に下ろした垂線の足をそれぞれ Q, R とする. また, P から正方形 ABCD に下ろした垂線の足を H とする. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ として, 次の問いに答えよ.

- (1) $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PH}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ および t を用いて表せ.
- (2) 四面体 PQRH の体積 $V(t)$ を求めよ.
- (3) (2) の $V(t)$ を最大にする t の値を求めよ.

3 $-\frac{\pi}{2} < x < \pi$ の範囲で, 関数 $f(x) = \frac{a}{2} \sin 2x + (a^2 - 2) \sin x$ を考える. ただし, a は正の定数とする.

- (1) $f(x) = 0$ が異なる解を 2 つ以上もつように, 定数 a の値の範囲を定めよ.
- (2) a が(1)で定めた範囲にあるとき, $f(x)$ はちょうど 3 つの極値をもつことを示せ.
- (3) a が(1)で定めた範囲にあるとする. $f(x) = 0$ の解のうち最大のものを x_0 とし, $f(x)$ の 3 つの極値を与える x の値のうち最大のものを x_1 , 2 番目に大きいものを x_2 として, $S_1 = \int_{x_1}^{x_0} f(x) dx, S_2 = \int_{x_2}^{x_0} f(x) dx$ とする. S_1 と S_2 の大小を比較せよ.

4 1つのサイコロを繰り返し投げるゲームを行う。ただし、ある目がその目の数だけ出た時点でゲームを終了するものとする。例えば、4, 5, 3, 3, 6 という順番でサイコロの目が出た時は、どの目もまだその目の数だけ出ていないので、ゲームを続け、6回目のサイコロ投げを行う。6回目のサイコロ投げで、1の目が出た時は、1の目が1回出たことになるので、この時点でサイコロ投げを止め、ゲームを終了する。また、3の目が出た時も、3の目が3回出たことになるので、ゲームを終了する。1と3以外の目が出た時は、まだどの目もその目の数だけ出ていないので、さらにゲームを続ける。次の問いに答えよ。

- (1) サイコロ投げの回数が3回以内でゲームが終了する確率を求めよ。
- (2) 最後に6の目が出てゲームが終了したとする。ゲームが終了するまでに、2, 3, 4, 5の目が出た回数をそれぞれ x_2, x_3, x_4, x_5 とする。 $(x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, i, j)$ となるサイコロの目の出かたは全部で何通りあるか。 i, j を用いて表せ。ただし、 i, j は $0 \leq i \leq 3, 0 \leq j \leq 4$ を満たす整数とする。
- (3) 最後に6の目が出てゲームが終了したとする。このようになるサイコロの目の出かたは全部で何通りあるか。次の a と b を用いて表せ。

$$a = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^4 \frac{(i+j+5)!}{i! \cdot j! \cdot 5!} (i+j+8)^3,$$

$$b = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^4 \frac{(i+j+5)!}{i! \cdot j! \cdot 5!} (i+j+8)$$