

平成 18 年度
医学部前期入学試験問題

数 学

(時間：120分)

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 試験中に問題冊子の印刷不鮮明および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 解答は、すべて解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
- 4 問題冊子の余白は、計算等に用いて構いません。
- 5 試験終了後、解答用紙のみを回収します。

1 次の問いに対して、答えだけを書け。

- (1) $\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ を満たす 2 次の正方行列 A について、 $A^4 - 3A^2 + 9E$ を求めよ。ただし、 E は 2 次の単位行列である。
- (2) 三角形 OAB は $OA = 1$, $OB = 2\sqrt{3}$, $\angle AOB = 30^\circ$ とする。点 A から直線 OB に下ろした垂線の足を P , 点 B から直線 OA に下ろした垂線の足を Q とし、線分 AB と線分 PQ のなす角を θ ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$) とする。 $\cos \theta$ の値を求めよ。

2 次の問いに答えよ。

- (1) 導関数の定義式を用いて、 $f(x) = x^2 \cos 3x$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。ただし、必要に応じて、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を用いてよい。
- (2) 数列 $\{a_n\}$ において、初項から第 n 項までの和を S_n とするとき、 $S_n S_{n+1} = 9^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つものとする。 $a_1 = 2$ とし、一般項 a_n を求めよ。

3 $t > 0$ とする。 $x > 0$ で定義された関数 $f(x)$ は上に凸で、第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつものとする。曲線 $C: y = f(x)$ 上の点 $P(t, f(t))$ において、 C と接する半径 1 の円の中心を $(X(t), Y(t))$ とする。ただし、 $Y(t) > f(t)$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) $X(t)$ と $Y(t)$ をそれぞれ t , $f(t)$, $f'(t)$ を用いて表せ。
- (2) すべての $t > 0$ について、 $Y'(t) = X'(t)f'(t)$ が成り立つことを示せ。
- (3) $T > 1$ とする。 t を媒介変数として、 $x = X(t)$, $y = Y(t)$ ($1 \leq t \leq T$) で表される xy 平面上の曲線の弧の長さを $L(T)$ とする。また、曲線 C の一部 $y = f(x)$ ($1 \leq x \leq T$) の弧の長さを $l(T)$ とする。このとき、 $L(T)$ と $l(T)$ はそれぞれ

$$L(T) = \int_1^T \sqrt{\{X'(t)\}^2 + \{Y'(t)\}^2} dt, \quad l(T) = \int_1^T \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$$

により与えられる。 $f(x) = \log x$ について、次の問いに答えよ。

- (i) $l(T)$ を求めよ。
- (ii) θ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$) を $\tan \theta = T$ となる実数とする。 $L(T)$ を $l(T)$ と θ を用いて表せ。
- (iii) $\lim_{T \rightarrow \infty} \{L(T) - l(T)\}$ を求めよ。

4 a, b, m, n を正の整数とする。次の問いに答えよ。

- (1) n が奇数のとき、 $1 + 2^n$ は 3 の倍数であることを示せ。
- (2) a, b を 3 で割ったときの余りを、それぞれ c, d とする。二項定理を用いることにより、 $a^n + b^n$ が 3 の倍数になることと $c^n + d^n$ が 3 の倍数になることは同値であることを示せ。
- (3) $a^{2m-1} + b^{2m-1}$ が 3 の倍数になることと $a + b$ が 3 の倍数になることは同値であることを示せ。