

平成 20 年度
医学部前期入学試験問題

数 学

(時間：120分)

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 試験中に問題冊子の印刷不鮮明および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 解答は、すべて解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
- 4 問題冊子の余白は、計算等に用いて構いません。
- 5 試験終了後、解答用紙のみを回収します。

1 次の問いに対して、答えだけを書け。

- (1) 不等式 $\log_2|x-1| + \log_{\frac{1}{4}}|4-x| < 2$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。
- (2) 座標平面上で O を原点とし、直線 $l_1: y = 2x$ 上の点 P と直線 $l_2: y = -2x$ 上の点 Q の中点を $M(x, y)$ とする。 P, Q が内積 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 3$ を満たしながら、それぞれ l_1, l_2 上を動くとき、点 M の軌跡の方程式を x, y を用いて表せ。

2 次の問いに答えよ。

- (1) 座標平面上で、 x 座標と y 座標がいずれも整数である点 (x, y) を格子点という。 n を正の整数として、連立不等式 $2y \leq x, y \geq 0, x \leq 2n+1$ の表す領域を D とする。
- (i) D に含まれる格子点の個数を n を用いて表せ。
- (ii) 各格子点 (x, y) に $z = \frac{y}{2^x}$ という値を対応させる。 D に含まれるすべての格子点について、 z をたしあわせたものを S とする。 S を n を用いて表せ。
- (2) すべての $x \geq 0$ について、 $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ が成り立つことを示せ。

3 $a > 1$ として、 $f(x) = \log(x^2 + a^2)$ とする。中心が R である円 C_1 が曲線 $C_2: y = f(x)$ と 2 点 $P(-a\sqrt{3}, f(-a\sqrt{3}))$, $Q(a\sqrt{3}, f(a\sqrt{3}))$ で接している。 C_1 の内部を線分 PQ で 2 つの部分に分割して、中心 R を含まないほうの図形の面積を S_1 とする。また、線分 PQ と C_2 で囲まれる図形の面積を S_2 とする。 $\angle PRQ$ を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とし、次の問いに答えよ。ただし、対数は自然対数とする。

- (1) R の座標と $\sin \theta$ の値を a を用いて表せ。また、極限值 $\lim_{a \rightarrow \infty} a\theta$ を求めよ。
- (2) S_1 を a と θ を用いて表せ。
- (3) S_2 を a を用いて表せ。
- (4) 問題2の(2)の不等式を利用することにより、極限值 $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S_1}{S_2}$ を求めよ。

4 $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ を自然対数の底とする。すべての自然数 m について、次の不等式が成り立つ。

$$1 + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} \leq e \leq 1 + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} + \frac{1}{m! \cdot m} \quad \dots\dots(*)$$

- (1) 不等式 (*) を利用して、以下の問いに答えよ。
- (i) $2.70 \leq e \leq 2.72$ であることを示せ。
- (ii) 2 以上のすべての自然数 m について、 $(m-1)! \cdot e$ が自然数でないことを示せ。
- (iii) e が無理数であることを示せ。
- (2) 次の(i)~(iv)の手順にしたがって、不等式 (*) が成り立つことを示せ。ただし、以下の(i)~(iv)における m, n は自然数である。(注意：(1)の結果を利用してはならない。)
- (i) $\left(1 + \frac{1}{n-m+1}\right)^n$ に 2 項定理を適用することにより、 $1 + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} \leq e$ が成り立つことを示せ。
- (ii) $\sum_{k=m+1}^{n+1} \frac{{}^{n+1}C_k}{(n+1)^k} < \frac{1}{m+1} \sum_{k=m}^n \frac{{}^nC_k}{n^k}$ が成り立つことを示せ。
- (iii) n についての数学的帰納法を用いて、 $\sum_{k=m}^n \frac{{}^nC_k}{n^k} < \frac{1}{m!} \left(1 + \frac{1}{m}\right)$ が成り立つことを示せ。
- (iv) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ に 2 項定理を適用することにより、 $e \leq 1 + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} + \frac{1}{m! \cdot m}$ が成り立つことを示せ。