平　成　21　年　度
医学部前期入学試験問題

数　学

（時間：120 分）

注　意　事　項

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません.
2　試験中に問題冊子の印刷不鮮明および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい.
3　解答は，すべて解答用紙の所定の欄に記入しなさい.
4　問題冊子の余白は，計算等に用いて構いません.
5　試験終了後，解答用紙のみを回収します.

$\boxed{1}$ 次の問いに対して，答えだけを書け．

(1) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$ を満たすすべての θ について，不等式 $\sin 3\theta + a\sin 2\theta + 3\sin\theta \geqq 0$ が成り立つような実数 a の値の範囲を求めよ．

(2) 1 辺の長さが 1 の正三角形 ABC の辺 CA を $p : 1-p\ (0 < p < 1)$ の比に内分する点を P とする．また，正三角形 ABC の外接円と線分 BP の延長線との交点を D とする．四角形 ABCD の面積を p を用いて表せ．

$\boxed{2}$ 4 つの整数 a，b，c，d と自然数 n について，$A_n = 3(a+b)^n + 2(a+c)^n + 4(a+d)^n - a^n$ とおく．以下の問いに答えよ．

(1) A_1 が 8 で割り切れるとき，ある整数 k，l，m について，$b = 2k$，$c = 2l - 3k$，$d = 2m - l$ と表せることを示せ．

(2) A_1 と A_2 が 8 で割り切れるとき，(1)の k と l が偶数であることを示せ．

(3) A_1 と A_2 が 8 で割り切れるとき，すべての自然数 n について，A_n が 8 で割り切れることを示せ．

$\boxed{3}$ 三角形 DEF の内接円 C_0 と辺 DE，EF，FD との接点をそれぞれ A，B，C とする．また，C_0 の中心を O，半径は 1 とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ として，以下の問いに答えよ．ただし，$\vec{x} \cdot \vec{y}$ は $\vec{x}$ と $\vec{y}$ の内積である．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ および内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を用いて表せ．さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{b} \cdot \vec{c}$ を用いて，また，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{c}$，$\vec{a}$，$\vec{c} \cdot \vec{a}$ を用いて表せ．

(2) $2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c} = \vec{0}$ が成立するものとして，次の問いに答えよ．

(i) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$，$\vec{b} \cdot \vec{c}$，$\vec{c} \cdot \vec{a}$ を求めよ．

(ii) 線分 AF と CE の交点を P とする．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(iii) 3 つの線分 AF，CE，BD が 1 点で交わることを示せ．

$\boxed{4}$ n を 2 以上の自然数とし，k を n 以下の自然数とする．座標平面上の原点 O のまわりに x 軸を $\dfrac{k}{4n}\pi$ 回転した直線を l_k とし，l_k と放物線 $y = x^2$ との 2 つの交点のうち原点以外の点を P_k とする．また，$n-1$ 以下の自然数 k について，三角形 $\mathrm{OP}_k\mathrm{P}_{k+1}$ の面積を S_k とおく．以下の問いに答えよ．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}\,dx$ を求めよ．

(2) すべての $k = 1, 2, \cdots, n-1$ について，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4n}\left(\tan^2\frac{k}{4n}\pi + \tan^4\frac{k}{4n}\pi\right) \leqq S_k \leqq \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4n}\left(\tan^2\frac{k+1}{4n}\pi + \tan^4\frac{k+1}{4n}\pi\right)$$

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1} S_k$ を求めよ．