平　成　22　年　度
医学部前期入学試験問題

数　　学

（時間：120 分）

注　意　事　項

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません．

2　試験中に問題冊子の印刷不鮮明および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい．

3　解答は，すべて解答用紙の所定の欄に記入しなさい．

4　問題冊子の余白は，計算等に用いて構いません．

5　試験終了後，解答用紙のみを回収します．

1 以下の各問いに答えよ．

(1)　$4s^2 + t^2 = 4$ を満たす実数 s，t について，$12s^2 + 16st - 3t^2$ の値を最小とする s，t の値を求めよ．

(2)　点 $(2, -2)$，$(4, 4)$ をそれぞれ点 $(1, 0)$，$(2, 2)$ に移す 1 次変換を f とし，放物線 $C_1 : y = x^2$ を f によって移した曲線を C_2 とする．C_1 上のある点 P における法線は C_2 上のある点における法線と一致する．点 P の座標を求めよ．

(3)　どの 3 点も 1 つの直線上にない点 A，B，C，D について，三角形 DBC，DCA，DAB の重心をそれぞれ E，F，G とする．三角形 ABC と三角形 EFG が相似であることを示し，面積比を求めよ．

(4)　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 4$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 2$ の三角形 OAB において，O から AB に下ろした垂線の足を P_1，P_1 から OA に下ろした垂線の足を P_2，P_2 から OB に下ろした垂線の足を P_3 とする．また，線分 OP_1 と $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ の交点を H とする．線分 OH の長さを求めよ．

(5)　m を自然数とする．すべての $x > 0$ について，$a_m + \displaystyle\int_0^x t^m e^{3t}\,dt = \sum_{k=0}^{m} a_k x^{m-k} e^{3x}$ を満たす数列 a_k $(k = 0,\ 1,\ \cdots,\ m)$ について，$S_m = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{a_k}{k\,!}$ の値を m で表せ．

2 関数 $f(x) = (\log x)^2 + 2\log x$ について，曲線 $y = f(x)$ を C とする．原点 O から C に引いた 2 本の接線と C との接点をそれぞれ $\mathrm{A}(a,\ f(a))$，$\mathrm{B}(b,\ f(b))$ とする．ただし，$a < b$ とする．以下の問いに答えよ．

(1)　$f(x)$ の増減，極値，変曲点を調べ，曲線 C の概形を描け．

(2)　a，b の値を求めよ．

(3)　曲線 C の点 A から点 B までの部分と線分 OA，OB で囲まれる図形を y 軸の周りに回転してできる回転体の体積を求めよ．

3 p，q は互いに素な自然数とする．以下の問いに答えよ．

(1)　p，q がともに奇数であるとき，$p^4 + q^4$ は自然数の 2 乗にならないことを示せ．

(2)　q は奇数とする．次の手順にしたがって，$(2p)^4 + q^4$ が自然数の 2 乗にならないことを背理法を用いて示せ．

(i)　次の仮定(H)が成り立つものとして，以下の問い(A)〜(D)に答えよ．

仮定(H)：$(2p)^4 + q^4 = r^2$ となる自然数 r が存在する．

(A)　$2p$ と r は互いに素になることを示せ．

(B)　互いに素な自然数 m，n があって，$r + (2p)^2 = m^4$，$r - (2p)^2 = n^4$ と表せることを示せ．

(C)　(B)の m，n について，$m + n = 2a$，$m - n = 2b$ とおく．p^2 を a，b を用いて表せ．

(D)　$2p_1$ と q_1 が互いに素になり，$p = 2p_1q_1r_1$ かつ $(2p_1)^4 + (q_1)^4 = (r_1)^2$ となる自然数 p_1，q_1，r_1 が存在することを示せ．

(ii)　(i)の仮定(H)が成り立たないことを示せ．