平　成　23　年　度
医学部前期入学試験問題

数　　学

（時間：120 分）

注　意　事　項

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません.

2　試験中に問題冊子の印刷不鮮明および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい.

3　解答は，すべて解答用紙の所定の欄に記入しなさい.

4　問題冊子の余白は，計算等に用いて構いません.

5　試験終了後，解答用紙のみを回収します.

1 以下の問いに答えよ．

(1) a，b は実数とする．x の 3 次関数 $f(x) = x^3 - 3ax - 2b$ について，以下の問いに答えよ．

(i) 方程式 $f(x) = 0$ の異なる実数解の個数を調べよ．

(ii) 方程式 $f(x) = 0$ が 2 つの異なる実数解をもつとき，その解を a を用いて表せ．

(iii) 方程式 $f(x) = 0$ が 3 つの異なる実数解をもつとき，それらの絶対値はすべて $2\sqrt{|a|}$ より小さいことを示せ．

(2) (i) すべての自然数 n と整数 k $(0 \leqq k \leqq n-1)$ について，

$2 \cdot {}_{2n}\mathrm{C}_{n+k} + {}_{2n}\mathrm{C}_{n+k+1} + {}_{2n}\mathrm{C}_{n+k-1} = {}_{2(n+1)}\mathrm{C}_{n+k+1}$ が成り立つことを示せ．

(ii) x は実数とする．すべての自然数 n について，

$2^{2n} \cdot \cos^{2n} x = {}_{2n}\mathrm{C}_n + 2\sum_{k=1}^{n} {}_{2n}\mathrm{C}_{n+k} \cos(2kx)$ が成り立つことを示せ．

2 1 辺の長さが 1 である正四面体 OABC に外接する球の中心を G とし，この球面と直線 OG との O 以外の交点を P とする．また，点 D，E，F はそれぞれ辺 OA，OB，OC 上にあって，四面体 PDEF が正四面体になるような点とする．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ として，以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) 正四面体 PDEF の 1 辺の長さを求めよ．

(3) 3 点 A，B，C を含む平面と辺 PD との交点を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(4) 正四面体 OABC の内部と正四面体 PDEF の内部の共通部分の体積を求めよ．

3 正の実数 a，b について，双曲線 $C_1 : x^2 - y^2 = a^2$ と楕円 $C_2 : \dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ は共有点をもち，その点における C_1 の接線と C_2 の接線は直交している．第 1 象限における C_1 と C_2 の共有点を P とし，e を自然対数の底として，以下の問いに答えよ．

(1) b および点 P の座標を a を用いて表せ．

(2) C_1 は t を媒介変数として，$x = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}a$，$y = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}a$ と表すことができる．点 P の座標を表す t を a を用いて表せ．

(3) $x > 0$ の範囲において，C_1 と C_2 によって囲まれる部分の面積を S_a とする．S_a を a を用いて表せ．

(4) (3)の S_a について，$\lim_{h \to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$ を利用することにより，極限値 $\lim_{a \to \infty} \dfrac{S_a}{a}$ を求めよ．

4 a_1，a_2，a_3 は，2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & 5a_2 \\ a_3 & a_n \end{pmatrix}$ が逆行列をもたないような，100 以下の自然数とする．ただし，$a_1 \geqq a_2 \geqq a_3$ のときは $n = 3$ とし，それ以外のときは $a_i < a_{i+1}$ を満たす最小の i $(i = 1$ または $2)$ を n とする．以下の問いに答えよ．

(1) 組 (a_1, a_2, a_3) を固定したとき，平面上の各点は A で表される 1 次変換によって原点を通るある直線 l 上に移ることを示せ．

(2) (1)の直線 l が $y = \dfrac{1}{5}x$ になるような (a_1, a_2, a_3) の組の個数はいくつか．

(3) $n = 1$ になるような (a_1, a_2, a_3) の組の個数はいくつか．