平　成　24　年　度
医学部前期入学試験問題

数　　学

（時間：120 分）

注　意　事　項

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません.
2　試験中に問題冊子の印刷不鮮明および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい.
3　解答は，すべて解答用紙の所定の欄に記入しなさい.
4　問題冊子の余白は，計算等に用いて構いません.
5　試験終了後，解答用紙のみを回収します.

1 以下の各問いに答えよ．

(1) 行列 $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ について，$AX=XB$，$X^{-1}=X$ を満たす行列 X をすべて求めよ．

(2) OC と AB が平行である台形 OABC があって，$\mathrm{OA}=\mathrm{OC}=\mathrm{BC}=1$，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$，$\angle\mathrm{AOC}>\dfrac{\pi}{2}$ を満たしているものとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\angle\mathrm{AOC}=\theta$ として，以下の問いに答えよ．

(i) $\cos\theta$ の値を求めよ．また，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{c}$ を用いて表せ．

(ii) 点 B から対角線 AC に垂線を下ろし，垂線と AC との交点を H とする．$\dfrac{\mathrm{CH}}{\mathrm{AH}}$ を求めよ．

2 以下の各問いに答えよ．

(1) e は自然対数の底とし，a は正の実数とする．以下の問いに答えよ．

(i) $x>0$ で定義された関数 $f(x)=a\log x-x$ の増減を調べ，極値を求めよ．

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^a e^{-2x}=0$ を示せ．

(iii) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\int_0^x t^2e^{-2t}\,dt$ を求めよ．

(2) $0<t<\pi$ とする．曲線 $C: y=\sin\dfrac{x}{2}\ (0\leqq x\leqq\pi)$ 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ \sin\dfrac{t}{2}\right)$ における C の接線を l_1，点 P と原点を通る直線を l_2 とする．以下の問いに答えよ．

(i) 接線 l_1 と x 軸との交点の x 座標を t を用いて表せ．

(ii) $j=1,\ 2$ について，直線 l_j，x 軸および直線 $x=t$ で囲まれた三角形を x 軸のまわりに回転させてできた円錐の体積を V_j とする．また，曲線 C，x 軸および直線 $x=t$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転させてできた回転体の体積を V とする．V_1，V_2 および V を t を用いて表せ．

(iii) 極限値 $\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}$ を求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ は利用してよい．

3 n は自然数とする．3 次方程式 $x^3-3x^2-27x-27=0$ の 3 つの解 a，b，c について，$p_n=a^n+b^n+c^n$ とおく．以下の問いに答えよ．

(1) a，b，c は 3 つの異なる実数であることを示せ．

(2) p_1，p_2，p_3 の値を求めよ．

(3) p_{n+3} を p_n，p_{n+1} および p_{n+2} を用いて表せ．

(4) p_n は 3^n の倍数であることを示せ．

4 自然数を自然数に移す関数 $f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & (n\text{ が偶数のとき}) \\ n+1 & (n\text{ が奇数のとき}) \end{cases}$ について，f が m を n に移すことを，$m \xmapsto{f} n$ と表す．例えば，

$$2 \xmapsto{f} 1, \quad 3 \xmapsto{f} 4 \xmapsto{f} 2 \xmapsto{f} 1$$

である．2 以上の自然数 n を f で繰り返し移すとき，1 に移るまでに必要な最小の移動回数を a_n とする．したがって，$a_2 = 1$，$a_3 = 1$ である．n を自然数として，以下の問いに答えよ．

(1) a_{2n+1} と a_{2n+2} をそれぞれ a_{n+1} を用いて表せ．

(2) 数列 $\{a_2,\ a_3,\ a_4,\ \cdots\cdots\}$ を次のように，第 n 群の項数が 2^{n-1} になるように分ける．

$$a_2 \,|\, a_3,\ a_4 \,|\, a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8 \,|\, a_9,\ a_{10},\ a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{14},\ a_{15},\ a_{16} \,|\, \cdots\cdots$$

(i) 第 n 群の初項を n を用いて表せ．

(ii) 第 n 群の総和を S_n とする．S_{n+1} を n と S_n を用いて表せ．また，S_n を n を用いて表せ．

(iii) $\displaystyle\sum_{k=2}^{2^n} a_k$ を n を用いて表せ．