

平成 27 年度
医学部前期入学試験問題

数 学

(時間：120分)

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 試験中に問題冊子の印刷不鮮明および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 解答は、すべて解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
- 4 問題冊子の余白は、計算等に用いて構いません。
- 5 試験終了後、解答用紙のみを回収します。

1 以下の各問いに答えよ.

- (1) ひし形 ABCD の一辺の長さは 2 で、 $\angle ABC = 60^\circ$ である. $\triangle ABC$ の外接円を C_1 、 $\triangle BCD$ の外接円を C_2 とするとき、 C_1 の内部でありかつ C_2 の内部である領域の面積を求めよ.
- (2) 実数を係数とする 3 次方程式 $x^3 - 2(\alpha + \beta)x^2 + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)x - 8\sqrt{3} = 0$ の 3 つの解が α 、 β 、 γ であるという. このような複素数 α 、 β 、 γ を求めよ.
- (3) 曲線 $y = (x^2 - 4)\log x$ ($x > 0$) と x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ.
- (4) a を定数とする. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ における 2 つの関数

$$f(x) = \frac{a}{2} \sin^2 x - \sin x + \cos x, \quad g(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x}$$

について、次の問いに答えよ.

- (i) $y = g(x)$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$) の増減を調べ、グラフをかけ.
- (ii) $y = f(x)$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$) が 2 つの極値をもつような定数 a の値の範囲を求めよ.
- (iii) 定数 a の値が(ii)で求めた範囲にあるとき、 $y = f(x)$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$) の 2 つの極値の和を a を用いて表せ.

2 右下の図のような立方体 OABC-DEFG において、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ 、 $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ 、 $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$ とする. また、2 点 P、Q は四角形 DEFG を含む平面上の点とする. $\overrightarrow{OP} = x\vec{a} + y\vec{c} + z\vec{d}$ として、以下の問いに答えよ.

- (1) 直線 OP と直線 BQ が垂直に交わる時、 x 、 y の満たす条件を求めよ. またこのとき、 \overrightarrow{OQ} を x 、 y 、 \vec{a} 、 \vec{c} 、 \vec{d} を用いて表せ.
- (2) 点 P が四角形 DEFG の内部または辺上にあり、直線 OP と直線 BQ が垂直に交わる時、直線 OP と直線 BQ の交点は立方体の内部または面上にあることを示せ.
- (3) 2 点 P、Q が四角形 DEFG の内部または辺上にあり、直線 OP と直線 BQ が垂直に交わるような x 、 y について、点 (x, y) の全体からなる領域を xy 平面上に図示せよ.

【要図版】

3 条件 $a_1 = \frac{7}{4}$ 、 $a_{n+1} = \sqrt{2 - a_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定められる実数の列 $\{a_n\}$ について、以下の問いに答えよ.

- (1) 極限 $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が存在すると仮定したとき、 a のとりうる値を求めよ.
- (2) 自然数 n と(1)で求めた a について、次の各不等式が成り立つことを証明せよ.

(i) $a_{2n} < a < a_{2n-1}$

(ii) $a - a_{2n} \leq \frac{1}{2^{2n-1}}$

(iii) $a_{2n-1} - a \leq \frac{1}{2^{2n-2}}$