

平成 28 年度
医学部前期入学試験問題

数 学

(時間：120分)

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 試験中に問題冊子の印刷不鮮明および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 解答は、すべて解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
- 4 問題冊子の余白は、計算等に用いて構いません。
- 5 試験終了後、解答用紙のみを回収します。

1 以下の各問いについて答えだけを書け.

- (1) 空間の点 $A(1, -3, -2)$, $B(-2, 3, 1)$ について, $AP = 2BP$ を満たす点 P の全体はどのような図形になるか.
- (2) 不等式 $\log_2(\log_4 x) + \log_4(\log_2 x) < 2$ を解け.
- (3) 5^{100} を 4^3 で割ったときの余りを求めよ.
- (4) n を自然数とする. $\sqrt{i} \leq j \leq n$ を満たす自然数の組 (i, j) の個数を n で表わせ.
- (5) 複素数平面上で, 3 点 $A(4z)$, $B(3z+2)$, $C(z^3)$ を頂点とする $\triangle ABC$ が正三角形となるような複素数 z をすべて求めよ.
- (6) $f(x) = \cos x + \int_0^\pi \sin(x-t)f(t) dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ.

2 $b (b > 1)$ を実数とする. $A(1, 0)$, $B(0, b)$ を 2 つの頂点とする正方形 $ABCD$ が xy 座標平面上にあり, 点 $E(-1, 0)$ と点 C を結んだ直線と y 軸の交点を F , また, 直線 CE と直線 AB の交点を G とする. ただし, 正方形の頂点は $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ の順に時計回りに並んでいるものとする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 点 C と点 D の座標をそれぞれ b で表わせ.
- (2) 点 G の座標を b で表わせ.
- (3) $\triangle DFG$ の外接円の中心の座標を b で表せ.

3 命題 P 「 $a (0 \leq a \leq 2\pi)$ を定数としたとき, 方程式 $x = \sin(x+a)$ はただ 1 つの実数解をもつ」が真であるとき, 方程式 $x = \sin(x+a)$ の解 x を $f(a)$ で表す. 以下の問いに答えよ.

- (1) 命題 P が真であることを示せ.
- (2) $n = 0, 1, 2$ について, $f(n\pi)$ の値を求めよ.
- (3) $0 < x < 2\pi$ のとき, $\cos(x+f(x)) < 1$ であることを示せ.
- (4) 次の各問いに答えよ. ただし, 関数 $f(x)$ は $0 \leq x \leq 2\pi$ で連続, $0 < x < 2\pi$ で微分可能であると仮定してよい.
 - (i) 関数 $\theta(x) = x + f(x)$ は $0 \leq x \leq 2\pi$ において増加することを示せ.
 - (ii) 関数 $y = f(x) (0 \leq x \leq 2\pi)$ の増減, グラフの凹凸を調べ, 最大値と最小値を求めよ.
 - (iii) 曲線 $y = f(x) (0 \leq x \leq 2\pi)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ.
- (5) 導関数の定義と $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を利用することにより, 関数 $f(x)$ が $0 < x < 2\pi$ で微分可能であることを示せ. ただし, $f(x)$ は $0 \leq x \leq 2\pi$ で連続であると仮定してよい.