平 成 31 年 度
医学部前期入学試験問題

数　学

（時間：120 分）

注 意 事 項

1 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません．

2 試験中に問題冊子の印刷不鮮明および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい．

3 解答は，すべて解答用紙の所定の欄に記入しなさい．

4 問題冊子の余白は，計算等に用いて構いません．

5 試験終了後，解答用紙のみを回収します．

1 以下の各問いについて答えだけを書け．

(1) 座標平面上に放物線 $y = x^2$ が与えられている．放物線上の点 $(a,\ a^2)$ における接線と，点 $(a+1,\ (a+1)^2)$ における接線の交点を P とする．a がすべての実数値をとって変化するとき，点 P の軌跡を求めよ．

(2) $\mathrm{AB} = 3$，$\mathrm{BC} = 4$，$\angle\mathrm{BAC} = 90^\circ$ である $\triangle\mathrm{ABC}$ があり，$\angle\mathrm{ABC}$ の 2 等分線に C から下ろした垂線の足を D とする．$\triangle\mathrm{BCD}$ の面積を求めよ．

(3) i を虚数単位とする．方程式 $z^3 = 2 - 2i$ を解け．

(4) 実数 x についての関数の列 $\{f_n(x)\}$ が $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - 2\int_0^1 f_n(t)\,dt$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots)$ を満たしている．極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(0)$ を求めよ．

2 座標空間に 4 点 A(6, 0, 0)，B(0, 6, 0)，C(0, 0, 6)，P(t, t, 1) をとる．ただし，$0 < t < \dfrac{5}{2}$ とする．点 P から $\triangle$ABC を含む平面に下ろした垂線の足を H とし，P から辺 CA，CB に下ろした垂線の足をそれぞれ Q，R とする．さらに，直線 QR に関して点 C と対称な点を S とする．以下の問いに答えよ．

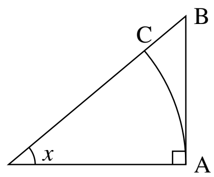
(1) 3 点 H，Q，S の座標をそれぞれ t で表せ．

(2) 四面体 PQRS の体積を t で表せ．

(3) 四面体 PQRS と四面体 PABC の共通部分の体積を t で表せ．

3 以下の問いに答えよ．

(1) 右図のような，半径 1，中心角 x ラジアンの扇形 OAC と $\angle$OAB が直角である $\triangle$OAB を考える．ただし，B は線分 OC の延長線上にあり，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ である．右図を参考にして，$\displaystyle\lim_{x\to+0} \frac{\sin x}{x} = 1$ となることを示せ．さらに，$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ が成り立つことも示せ．



(2) 微分の定義にしたがって，関数 $y = \sin x$ の導関数を求めよ．

4 正の定数 a について，$a_1 = a$，$a_{n+1} = e^{a_n}$ により，数列 $\{a_n\}$ を定める．また，関数 $y = x^{\frac{1}{x}}$ $(x > 0)$ の最大値を b とする．以下の問いに答えよ．ただし，e を自然対数の底とする．

(1) 関数 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \log x$ $(x > 0)$ の最大値を求めよ．

(2) 関数 $y = x^{\frac{1}{x}}$ $(x > 0)$ の増減，漸近線を調べて，グラフの概形をかけ．

(3) $1 \leqq a \leqq b$ であるとき，すべての自然数 n について，不等式 $a \leqq a_n \leqq a_{n+1} \leqq e$ が成立することを示せ．

(4) $a = \sqrt{2}$ について，極限値 $l = \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．ただし，極限値 l が存在することは仮定してよい．