

令和5年度  
医学部前期入学試験問題

# 数 学

(時間：120分)

## 注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 試験中に問題冊子の印刷不鮮明および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 解答は、すべて解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
- 4 問題冊子の余白は、計算等に用いて構いません。
- 5 試験終了後、解答用紙のみを回収します。

**1** 以下の各問いに答えよ.

- (1)  $a = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ ,  $b = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$  について,  $b^7 - a^7 = c\sqrt{d}$  となる 2 以上の整数  $c, d$  を求めよ.
- (2) 自然数  $n$  について,  $3^n$  を 5 で割ったときの余りを  $r_n$  とする. すべての自然数  $n$  について, 等式  $r_{n+m} = r_n$  を満たす最小の自然数  $m$  を求めよ. また,  $2023^{2023}$  を 5 で割ったときの余りを求めよ.
- (3) 右表は, 100 人の生徒を 2 つのクラス X, Y に分けて行った試験の結果である. 100 人全員の点数についての平均点が 60 点, 分散が 87 であるとき, X クラスの平均点  $\bar{x}$  の値を求めよ. ただし,  $\bar{x} < \bar{y}$  である.
- | クラス | 人数 | 平均点       | 分散 |
|-----|----|-----------|----|
| X   | 60 | $\bar{x}$ | 83 |
| Y   | 40 | $\bar{y}$ | 78 |
- (4) 関数  $f(x) = e^{\sqrt{3}x} \cos 3x$  の第 50 次導関数を  $f^{(50)}(x)$  とする. 三角関数の合成を考えることにより, 方程式  $f^{(50)}(x) = 0$  の  $0 \leq x \leq 2\pi$  における解をすべて求めよ.

**2**  $a, b$  は実数の定数とする.  $x$  の多項式  $f(x) = ax^4 - (a+1)bx^3 + (a^2 + b^2 + 1)x^2 - (a+1)bx + a$  について, 以下の問いに答えよ.

- (1)  $a = \alpha\beta$ ,  $b = \alpha + \beta$  を満たす複素数  $\alpha, \beta$  を  $a, b$  で表せ.
- (2) (1)の  $\alpha, \beta$  について,  $f(\alpha)$  と  $f(\beta)$  の値を求めよ.
- (3) 0 でない複素数  $z$  が  $f(z) = 0$  を満たすとき,  $f\left(\frac{1}{z}\right)$  の値を求めよ.
- (4) 方程式  $f(x) = 0$  が異なる 4 つの実数解をもつための  $a, b$  の条件を求めよ.

**3** 辺 OA, OB, AB の長さがそれぞれ 6, 5, 4 である  $\triangle OAB$  がある. 辺 AB を  $t : (1-t)$  に内分する点 P から直線 OA に下ろした垂線と直線 OA との交点を Q とする. ただし,  $0 < t < 1$  である. また, 点 P から直線 OB に下ろした垂線と直線 OB との交点を R とする.  $\vec{a} = \vec{OA}$ ,  $\vec{b} = \vec{OB}$  として, 以下の問いに答えよ.

- (1)  $\theta = \angle AOB$  について,  $\cos \theta$  と  $\sin \theta$  の値を求めよ.
- (2)  $\vec{OQ}$  と  $\vec{OR}$  をそれぞれ  $t, \vec{a}, \vec{b}$  で表せ.
- (3)  $\triangle APQ$  の面積と  $\triangle BPR$  の面積の和を  $S(t)$  とする.  $0 < t < 1$  における  $S(t)$  の最小値を求めよ.

**4** 関数  $f(x) = (x+3)\sqrt{2-x}$  について, 以下の問いに答えよ.

- (1) 関数  $y = f(x)$  の増減, 極値, グラフの凹凸を調べ, そのグラフを描け.
- (2) 曲線  $y = f(x)$  と  $x$  軸で囲まれた図形の面積  $S$  を求めよ.
- (3) 方程式  $f(x) = f(-x)$  を解け.
- (4) 曲線  $y = f(x)$  と  $x$  軸で囲まれた図形を,  $y$  軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積  $V$  を求めよ.