

## 前期日程問題

# 平成6年度医学科入学試験問題

# 数 学

### (注意事項)

- 1 監督者の指示があるまで、この冊子を開いてはいけない。
- 2 **解答用紙に受験番号と氏名を必ず記入すること。**
- 3 この問題冊子の本文は、5 ページからなっている。落丁、乱丁及び印刷不鮮明な箇所があれば、手をあげて監督者に知らせること。
- 4 この問題冊子の計算用紙と余白は、適宜下書きに使用してもよい。
- 5 解答は、すべて別紙「解答用紙」の指定された場所に記入すること。
- 6 この問題冊子は持ち帰ること。

**1** 次の(1), (2)に答えよ.

(1) 放物線  $y = x^2$  上の異なる 2 点

$$A(p, p^2), \quad B(q, q^2) \quad (\text{ただし, } p < q)$$

における各々の接線の交点を  $C$  とする. このとき,

(ア) 点  $C$  を求めよ.

(イ)  $\triangle ABC$  の面積を求めよ.

(2) 放物線  $y = x^2$  上に  $n + 1$  個の点

$$P_k(a_k, a_k^2) \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

をとる. ただし,  $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = 1$  とする. 隣り合った 2 点  $P_{k-1}, P_k$  における各々の接線の交点を  $Q_k$  とする. ( $k = 1, 2, \dots, n$ )

いま, 点  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n$  を順次結んで出来る折れ線を  $K$ , 点  $P_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1}, Q_n, P_n$  を順次結んで出来る折れ線を  $L$  とする. 折れ線  $K$  と折れ線  $L$  で囲まれた領域の面積を  $S$  とする.

次のように,  $d_1, d_2, \dots, d_n, \alpha, \beta$  を定める.

$$d_k = a_k - a_{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

$$\alpha = \sum_{i=1}^n d_i^2, \quad \beta = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n (d_i + d_j)(d_i - d_j)^2 \right)$$

このとき,

(ア)  $S$  を  $d_1, d_2, \dots, d_n$  で表せ.

(イ)  $S$  を  $\alpha, \beta$  で表せ.

(ウ)  $n$  を 1 つ決めておいたとき,  $S$  を最小にする  $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  を求めよ.

ただし,  $a_0 = 0, a_n = 1$  とする. さらに, そのときの  $S$  を求めよ.

**2**  $a, b, c, d, p, q, p', q', h > 0, k > 0$  は、すべて定数とし、

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

とする。ただし、 $ad - bc \neq 0$  とする。  $xy$  座標平面において、直線  $l, l'$  およびだ円  $C_1$  を

$$l: px + qy = 1, \quad l': p'x + q'y = 1,$$

$$C_1: \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2} = 1$$

とし、行列  $A$  の定める  $xy$  座標平面の 1 次変換を  $f$  とする。また、 $uv$  座標平面において、だ円  $C_2$  を

$$C_2: h^2u^2 + k^2v^2 = 1$$

とし、行列  $B$  の定める  $uv$  座標平面の 1 次変換を  $g$  とする。このとき、

- (1) 直線  $l$  がだ円  $C_1$  に接するための必要十分条件は  $h^2p^2 + k^2q^2 = 1$  であることを示せ。
- (2) 1 次変換  $f$  による直線  $l$  の像が直線  $l'$  であるとき、 $p', q'$  を  $a, b, c, d, p, q$  で表せ。
- (3) 1 次変換  $f$  によるだ円  $C_1$  の像がだ円  $C_1$  自身ならば、1 次変換  $g$  によるだ円  $C_2$  の像がだ円  $C_2$  自身であることを示せ。

**3** A, B 2 人が次のような勝負をする.

赤玉が  $a$  個, 白玉が  $b$  個入っている袋があり, この袋から無作為に 1 個の玉を取り出し, もとに戻す試行を繰り返す. 各試行において, 取り出された玉が赤玉ならば, A が 1 点得点し, 白玉ならば, B が 1 点得点する.

2 人の得点差が 2 点になったとき高得点者を勝者とする. このとき,

- (1) ちょうど  $n$  回目の試行で勝負がついたとすると,  $n$  は偶数であることを示せ.
- (2) A が勝者となる確率はいくらと考えられるか.
- (3) 「この勝負はいつか決着がつく」と言える理由を述べよ.

**4** 関数  $\varphi(x)$  を次のように定める.

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & (|x| \leq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|x| \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき、次の(1)にあるア～コにあてはまる適当な数または式を入れ、解答欄に答えよ.

- (1)  $p$  は定数で  $|p| < 1$  とし、 $n$  は正の整数とする.  $x$  の関数  $\varphi(n(x-p))$  は、 $x$  の範囲  $\boxed{\text{ア}} \leq x \leq \boxed{\text{イ}}$  以外では常に 0 である. このとき、 $-2 < \boxed{\text{ア}}$ 、 $\boxed{\text{イ}} < 2$  である.

$k$  を 0 または正の整数とし、

$$I_{n,k}(p) = \int_{-2}^2 n\varphi(n(x-p))x^k dx$$

とおく. このとき、

$$I_{n,k}(p) = \int_{\boxed{\text{ア}}}^{\boxed{\text{イ}}} n\varphi(n(x-p))x^k dx$$

である. いま、 $t = n(x-p)$  と置いて置換積分すると、

$$I_{n,k}(p) = \int_{\boxed{\text{ウ}}}^{\boxed{\text{エ}}} (1-t^2)^{\boxed{\text{オ}}} dt$$

である.  $k = 0$  のときは、

$$I_{n,0}(p) = \boxed{\text{カ}}$$

である.  $k$  が正の整数のときは、 $\boxed{\text{オ}}$  に二項定理を適用することで、

$$I_{n,k}(p) = \sum_{r=0}^k {}^k C_r \boxed{\text{キ}} \left( \int_{\boxed{\text{ウ}}}^{\boxed{\text{エ}}} \boxed{\text{ク}} dt \right) \frac{1}{n^r}$$

この積分の値を求めると、

$$I_{n,k}(p) = \sum_{r=0}^k {}^k C_r \boxed{\text{キ}} \cdot \boxed{\text{ケ}} \cdot \frac{1}{n^r}$$

このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{n,k}(p) = \boxed{\text{コ}}$

(2)  $f(x)$  は整式とする. 任意の実数  $p$  ( $|p| < 1$ ) と任意の正の整数  $n$  に対して,

$$\int_{-2}^2 \varphi(n(x-p))f(x) dx = 0$$

であれば, 整式  $f(x)$  は恒等的に 0 であることを示せ.