前期日程問題

平成７年度医学科入学試験問題

数　　学

〔注意事項〕

1　監督者の指示があるまで，この冊子を開いてはいけない．

2　**解答用紙に受験番号と氏名を必ず記入すること．**

3　この問題冊子の本文は，3 ページからなっている．落丁，乱丁及び印刷不鮮明な箇所があれば，手をあげて監督者に知らせること．

4　この問題冊子の計算用紙と余白は，適宜下書きに使用してもよい．

5　解答は，すべて別紙「解答用紙」の指定された場所に記入すること．

6　この問題冊子は持ち帰ること．

1 xy 平面を水平面とすると xyz 空間に，斜面 $z = x$ がある．zx 平面での大きさのない玉の運動は，玉の位置の座標を $(x,\ y,\ z)$ とするとき，次の式を満たす．

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad y = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g$$

ただし，g は正の定数である．また，玉が斜面にぶつかって反射するとき，斜面に対して入射角と反射角が等しく，速さは変わらない．

(1) 初速度ベクトル $\overrightarrow{v} = (p,\ 0,\ q)$（ただし，$p < q$）で点 $(a,\ 0,\ a)$ から玉を打ち出す．このとき，初めて斜面に着地する点と，その点で反射した直後の速度ベクトルを求めよ．

(2) 初速度ベクトル

$$\overrightarrow{v} = (\cos\theta,\ 0,\ \sin\theta) \quad \left(\text{ただし，}\ \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

で原点から玉を打ち上げたとき，n 回目に斜面に着地する点の座標を $(x_n,\ 0,\ x_n)$ とする．このとき

(a) x_n を求めよ．

(b) n を 1 つ決めておき，θ を $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で変化させたときの x_n の最大値 h_n を求めよ．

(c) $\lim_{n\to\infty} h_n$ を求めよ．

2　n は正の整数とする．円 $x^2+y^2-2y=0$ の中心を C とおく．$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ に対して，点 $\mathrm{A}_k\left(\dfrac{k}{n},\ 0\right)$ をとり，$\alpha_k=\angle \mathrm{A}_k\mathrm{CO}$ とする．

$$\theta_k=\alpha_k-\alpha_{k-1}=\angle \mathrm{A}_{k-1}\mathrm{CA}_k \qquad (k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

と定めるとき，

(1)　$\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin\theta_k<\dfrac{\pi}{8}<\dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\tan\theta_k$ を示せ．

(2)　$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ に対して，次の 2 つの不等式を示せ．

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\left(\dfrac{k}{n}\right)^2}<\sin\theta_k,$$

$$\tan\theta_k<\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\left(\dfrac{k-1}{n}\right)^2}$$

(3)　上の結果を用いて，$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx$ を求めよ．

要図版

3 次の問の答を解答欄に記入せよ．

(1) 次の $\boxed{\text{ア}}$ 〜 $\boxed{\text{エ}}$ にあてはまる語句を，下の欄の a 〜 g の中から選び，記号で答えよ．

φ が集合 X から集合 Y への写像であるとき，X の $\boxed{\text{ア}}$ 元 x に対して，Y の元 $\varphi(x)$ が $\boxed{\text{イ}}$ 定まっている．写像 φ が 1 対 1 の写像であれば，X の $\boxed{\text{ア}}$ $\boxed{\text{ウ}}$ 元 x，x' に対して，$\varphi(x) \neq \varphi(x')$ が成り立つ．また写像 φ が X から Y への上への写像であれば，Y の $\boxed{\text{ア}}$ 元 y に対して，$\varphi(x) = y$ なる X の元 x が $\boxed{\text{エ}}$ 存在する．

a： 適当な　　b： 任意の　　c： 相異なる
d： 等しい　　e： ちょうど 1 つ
f： 少なくとも 1 つ　　g： 多くても 1 つ

(2) 正の整数 n に対して，$N(n) = \{1, 2, \cdots\cdots, n\}$ とする．正の整数 n，m に対して，

(a) $N(n)$ から $N(m)$ への写像の総数を求めよ．

(b) $n < m$ のとき，$N(n)$ から $N(m)$ への 1 対 1 の写像の総数を求めよ．

(c) $N(m+1)$ から $N(m)$ への上への写像の総数を求めよ．

(d) $m \geqq 2$ のとき，$N(m+2)$ から $N(m)$ の上への写像の総数を求めよ．

(3) 8 個のサイコロを同時にふるとき，8 つの出た目に 1 から 6 がすべて少なくとも 1 つはある確率を求めよ．（答は，既約分数にして，分母分子をそれぞれ素因数分解せよ．）