前期日程問題

平成１０年度医学科入学試験問題

数　　学

〔注意事項〕

1 監督者の指示があるまで，この冊子を開いてはいけない．

2 **解答用紙に受験番号と氏名を必ず記入すること．**

3 この問題冊子の本文は，4 ページからなっている．落丁，乱丁及び印刷不鮮明な箇所があれば，手をあげて監督者に知らせること．

4 この問題冊子の計算用紙と余白は，適宜下書きに使用してもよい．

5 解答は，すべて別紙「解答用紙」の指定された場所に記入すること．

6 この問題冊子は持ち帰ること．

1 n，p は正の整数とする．$f(x)$，$g(x)$ は n 次の整式で，ともに x^n の係数は 1 とする．このとき，$\{f(x)\}^p$ と $\{g(x)\}^p$ において

$$x^{np-1},\quad x^{np-2},\quad \cdots,\quad x^{np-n}$$

の係数がそれぞれ一致しているならば，$f(x)=g(x)$ であることを示せ．

2 θ は定数で，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．原点からの半直線 OA が正の x 軸となす角は θ であり，半直線 OA と半直線 OB は y 軸に関して対称とする．動点 P は半直線 OA 上を，動点 Q は半直線 OB 上を動き，線分 PQ の長さはつねに 2 であるとき，線分 PQ の中点 M の軌跡を C とする．

このとき，

(1) 曲線 C を求めよ．

(2) 曲線 C と 2 つの半直線 OA，OB とで囲まれた領域の面積を求めよ．

3 次の問に答えよ.

⑴ 次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ を求めよ.

$$a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0 \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots),$$

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3$$

⑵ 数列 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ は次の条件を満たしているとする.

正の整数 n に対して,

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = b_n + c_n,$$

b_nは正の整数

$$0 < c_n < 1$$

このとき, 2 つの極限値 $\lim_{n\to\infty} c_{2n+1}$, $\lim_{n\to\infty} c_{2n}$ を求めよ.

4　次の問に答えよ．

⑴　任意の実数 t に対して，t を定数とする次の 3 次方程式はただ 1 つの実数解をもつことを示せ．

$$x^3 + 12x = t$$

以下，この実数解を $f(t)$ と表す．

⑵　関数 $f(t)$ のグラフのおよその様子を描け．

⑶　xy 平面上の動点 P の x 座標，y 座標が時刻 t の関数として

$$x = f(t), \quad y = \frac{1}{4}\{f(t)\}^2$$

で与えられているとする．点 $(0,\ 1)$ を F とするとき，時刻 t $(t \geqq 0)$ から時刻 $t+h$ $(h > 0)$ までの間に線分 FP が通過する部分の面積を S とする．
このとき，

(i)　S を求め，S は t に関係しないことを示せ．

(ii)　時刻 t のとき，加速度ベクトルを方向ベクトルとし，点 P を通る直線は定点を通ることを示せ．