前期日程問題

平成１１年度医学科入学試験問題

数　　　学

〔注意事項〕

1 監督者の指示があるまで，この冊子を開いてはいけない.

2 **解答用紙に受験番号と氏名を必ず記入すること.**

3 この問題冊子の本文は，6 ページからなっている．落丁，乱丁及び印刷不鮮明な箇所があれば，手をあげて監督者に知らせること.

4 この問題冊子の計算用紙と余白は，適宜下書きに使用してもよい.

5 解答は，すべて別紙「解答用紙」の指定された場所に記入すること.

6 この問題冊子は持ち帰ること.

1 $a < b$ は実数の定数とする．

$-\infty < x < \infty$ で定義された関数 $f(x)$ は，次の(a)，(b)を満たすとする．

(a) $y = f(x)$ のグラフは，直線 $x = a$ に関して対称である．

(b) $y = f(x)$ のグラフは，直線 $x = b$ に関して対称である．

このとき，

(1) 定数関数以外で，このような関数 $f(x)$ の例を 1 つ求めよ．

(2) $f(x)$ が整式であれば，$f(x)$ は定数であることを示せ．

2 $f(x)$，$g(x)$ は整式で，

$$-\infty < t < \infty \text{ において，} f(\sin t) = g(\cos t)$$

が成り立つとする．このとき，整式 $f(x)$，$g(x)$ はともに偶関数であり，次数が等しいことを示せ．

$\boxed{3}$ 次の文を読んで，下の問に答えよ．

各項が複素数である数列を複素数列という．

複素数列 $\{z_n\}$（ただし，$z_n = x_n + iy_n$）と複素数 $\alpha = a + ib$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

が成り立つとき，複素数列 $\{z_n\}$ は α に収束するといい，

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha$$

と書く．

複素数列 $\{z_n\}$ に対して

$$A_n = z_1 + z_2 + \cdots\cdots + z_n$$

とおくとき，複素数列 $\{A_n\}$ が複素数 A に収束するならば，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は収束するといい，

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = A$$

と書く．

(1) α が複素数で，$|\alpha| < 1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0$ を示せ．

(2) α が複素数で，$|\alpha| < 1$ のとき，次の等式を示せ．

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}$$

(3) θ が実数のとき，次の無限級数を求めよ．

$$C = 1 + \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{1}{4}\cos 2\theta + \cdots\cdots + \frac{1}{2^n}\cos n\theta + \cdots\cdots$$

$$S = \qquad \frac{1}{2}\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta + \cdots\cdots + \frac{1}{2^n}\sin n\theta + \cdots\cdots$$

4 T は $m \times n$ 行列で，その成分は

0 または 1

とする．行列 T の $(i,\ k)$ 成分を t_{ik} と表す．

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{m1} & \cdots & t_{mn} \end{bmatrix}$$

このとき，$i < j$ を満たす 2 つの行番号 i，j と列番号 k に対して，$f(i,\ j,\ k)$ を次のように定める．

もしも　$t_{ik} = t_{jk} = 1$ ならば，$f(i,\ j,\ k) = 1$

それ以外のときは，$f(i,\ j,\ k) = 1$

いま，a，b，p は自然数の定数で，行列 T は次の(a)，(b)，(c) を満たすとする．

(a) 任意の行番号 i について，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} t_{ik} = a$

(b) 任意の列番号 k について，$\displaystyle\sum_{i=1}^{m} t_{ik} = b$

(c) $i < j$ を満たす任意の 2 つの行番号 i，j について，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(i,\ j,\ k) = p$

このとき，次の問に答えよ．

(1)　$m = 4$，$n = 6$，$a = 3$，$b = 2$，$p = 1$ で，上の(a)，(b)，(c) を満たす行列 T を 1 つ求めよ．

さらに，一般の場合に次の(2)，(3)，(4) に答えよ．

(2) $\displaystyle\sum_{i<j}\left(\sum_{k=1}^{n} f(i,\ j,\ k)\right)$ を求めよ．
すなわち，各 i，j $(i<j)$ に対して括弧内の和を求め，全体の和を求めよ．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i<j} f(i,\ j,\ k)\right)$ を求めよ．
すなわち，各 k に対して括弧内の和を求め，全体の和を求めよ．

(4) $(m-1)p=(b-1)a$ が成立することを示せ．

（上の(3)，(4)において，$\displaystyle\sum_{i<j}$ は $i<j$ を満たす全ての行番号 i，j についての和を意味する．）

5 $0 < x < \infty$ での関数 $f(x)$ を次のように定める.

$$f(x) = 1 - x + \log x$$

このとき,

(1) 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = x - 1$ は，$0 < x < \dfrac{1}{2}$ の範囲で 1 点で交わることを示せ.

(2) 上の(1)での交点における曲線 $y = f(x)$ の接線と x 軸と y 軸とで囲まれた三角形の面積を S_1 とし，曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = x - 1$ で囲まれた領域の面積を S_2 とするとき，比 $S_1 : S_2$ を求めよ.