前期日程問題

平成１２年度医学科入学試験問題

数　学

〔注意事項〕

1　監督者の指示があるまで，この冊子を開いてはいけない．

2　**解答用紙に受験番号と氏名を必ず記入すること．**

3　この問題冊子の本文は，5 ページからなっている．落丁，乱丁及び印刷不鮮明な箇所があれば，手をあげて監督者に知らせること．

4　この問題冊子の計算用紙と余白は，適宜下書きに使用してもよい．

5　解答は，すべて別紙「解答用紙」の指定された場所に記入すること．

6　この問題冊子は持ち帰ること．

1 a，b は定数で，$0 < a < b$ とする．

定数 $t > a$ に対して，

xy 平面上の曲線 $y = (-1)(x+b)(x+a)(x-a)(x-t)$ と x 軸とで囲まれてできる 3 つの領域の左端の面積を $L(t)$ とし，右端の部分の面積を $R(t)$ とする．

このとき，

(1) $t = b$ のとき，$L(t) = R(t)$ であることを示せ．

(2) $L(t) = R(t)$ となる t $(t > a)$ を求めよ．

2　n を正の整数とするとき，x を未知数とする次の方程式を考える．

$$n^2 i x^2 - 2\sqrt{2} n(1+i) i^n x + 3(-1)^n = 0$$

このとき，

(1)　上の方程式を満たす複素数を 2 つ求めよ．

(2)　上の方程式を満たす 2 つの複素数のうち絶対値の小さい方を z_n とし，和 $\sum_{k=1}^{n} z_k$ の実部と虚部をそれぞれ u_n と v_n とする．すなわち，

$$\sum_{k=1}^{n} z_k = u_n + i v_n$$

このとき，極限値 $\lim_{n\to\infty} u_n$ と $\lim_{n\to\infty} v_n$ とを，π と $\log 2$ を用いて表せ．

ただし，次の等式は知られている．

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\cdots$$

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\cdots$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 実数を成分にもつ 3 次の正方行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ は次を満たすとする.

(i) すべての i, j について, $a_{ij} = a_{ji}$ である.

(ii) $A^2 = A$

このとき, 次を示せ.

(1) 各 i $(i = 1,\ 2,\ 3)$ に対して, $0 \leqq a_{ii} \leqq 1$ が成り立つ.

(2) $i \neq j$ のとき, $|a_{ij}| \leqq 1/2$ が成り立つ.

(3) $a_{ii} = 0$ または $a_{ii} = 1$ のとき, 各 j $(j \neq i)$ について $a_{ij} = 0$ が成り立つ.

(4) 行列 A が逆行列をもつならば, A は単位行列である.

さらに,

(5) $a_{11} = 1$, $a_{23} \neq 0$ であるような行列 A の例をあげよ.

$\boxed{4}$

xyz 座標空間内に，高さ k の直円柱 K がある．その底面の周 C は xy 平面上にあり，円 C の中心は原点 O で，半径は R である．直円柱 K の上底（その周を C' とする．）は，平面 $z = k$ 上にある．3 点 $\mathrm{P}(0,\ R,\ 0)$，$\mathrm{P}'(0,\ R,\ k)$，$\mathrm{O}'(0,\ 0,\ k)$ をとる．

平面 $z = k$ 上において，線分 $\mathrm{O'P'}$ 上に点 M をとり，点 M を通り直線 $\mathrm{O'P'}$ に垂直な直線と円 C' との交点を L，N とする．さらに，$\alpha = \angle \mathrm{MO'L}$，$\beta = \angle \mathrm{MPO}$ とする．

このとき，3 点 P，L，N を通る平面によって直円柱 K を切断することでできる 2 つの部分の小さい方の体積 V は，次で与えられることを示せ．

$$V = R^3 \tan\beta\left(\sin\alpha - \frac{1}{3}\sin^3\alpha - \alpha\cos\alpha\right)$$

【要 図版】

$\boxed{5}$

xyz 座標空間内に，高さ h の直円柱 H がある．その底面の周 C は xy 平面上にあり，円 C の中心は原点 O で，その半径は R である．直円柱 H の上底は平面 $z = h$ 上にある．xy 平面上の円 C に外接する正 n 角形 $(n = 3,\ 4,\ 5,\ \cdots)$ を底面とし，点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ h)$ を頂点とする正 n 角錐を B_n とする．

正 n 角錐 B_n の内部にある直円柱 H の部分の体積 V_n を求めよ．

さらに，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} V_n$ を求めよ．

（この問 5 を解くにあたって，前問の問 4 の結果を利用してよい．）