前期日程問題

平成１３年度医学科入学試験問題

数　　学

〔注意事項〕

1　監督者の指示があるまで，この冊子を開いてはいけない．

2　**解答用紙に受験番号と氏名を必ず記入すること．**

3　この問題冊子の本文は，４ページからなっている．落丁，乱丁及び印刷不鮮明な箇所があれば，手をあげて監督者に知らせること．

4　この問題冊子の計算用紙と余白は，適宜下書きに使用してもよい．

5　解答は，すべて別紙「解答用紙」の指定された場所に記入すること．

6　この問題冊子は持ち帰ること．

1　次の実数係数の 3 次式を $f(x)$ とする．

$$f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$$

いま，2 つの実数係数の整式 $g(x)$，$h(x)$ が次を満たすものとする．

$$f(g(x)) = f(h(x))\text{：恒等的に等しい}$$

このとき，次のいずれかが成り立つことを示せ．

⑴　$g(x) = h(x)$：恒等的に等しい

⑵　2 つの整式 $g(x)$，$h(x)$ はともに定数である．

2 0でない複素数からなる集合 G は次を満たしているとする．

G の任意の要素 z，w の積 zw は再び G の要素である．

n を正の整数とする．このとき，

(1) ちょうど n 個の複素数からなる G の例をあげよ．

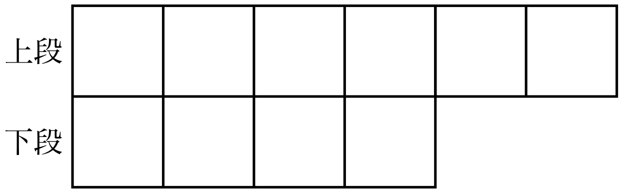
(2) ちょうど n 個の複素数からなる G は(1)の例以外にないことを示せ．

3 n，k は正の整数 $(n \geqq k)$ で，$N = n + k$ とする．

図のように，N 個の同じ大きさの空白の枠がある．

上段には n 個の枠があり，下段には k 個の枠がある．

上段と下段の左端はそろっており，各段の枠は隣との間にすき間はない．



図では，$n = 6$，$k = 4$ である．

1 から N までの N 個の自然数を各枠の中に 1 つずつ次の 2 つの条件を満たすように並べる．

1) 各段においては，枠の中の数は右に行くに従って大きくなる．

2) 左から k 個の各列においては，下段の数は上段の数よりも大きい．

この 2 つの条件を満たすように 1 から N を並べる並べ方の数を $f(n,\ k)$ とする．このとき，

⑴ $n > k \geqq 2$ のとき，次が成り立つことを示せ．

$$f(n,\ k) = f(n-1,\ k) + f(n,\ k-1)$$

⑵ $n \geqq 2$ のとき，次が成り立つことを示せ．

$$f(n,\ n) = f(n,\ n-1)$$

⑶ 次が成り立つことを示せ．

$$f(n,\ k) = {}_{n+k}\mathrm{C}_k \frac{n-k+1}{n+1}$$

4

(1)　定数 k，a，q は次を満たすものとする．

$$0 < q < a < k$$

xyz 座標空間において，次のような半球面 S，直円柱面 C，直円錐面 K があるとする．

S：　$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ z \geqq 0$ が定める半球面．

C：　xy 平面上の円 $x^2 + y^2 \leqq a^2$ を底面とする直円柱の側面．

K：　底面が xy 平面上の円（中心は原点）で，頂点が点 $(0,\ 0,\ k)$ であり，球面 S に接している直円錐の側面．

半球面 S と直円錐面 K との接点は平面 $z = q$ 上にあるとする．

定数 $h > 0$ は次を満たすものとする．

$$0 < q - \frac{h}{2} < q < q + \frac{h}{2} < a$$

このとき，2 平面 $z = q - \dfrac{h}{2}$，$z = q + \dfrac{h}{2}$ に挟まれた直円柱面 C の部分の面積 $S(h)$ と，同じ 2 平面で挟まれた直円錐面 K の部分の面積 $T(h)$ をそれぞれ求めよ．

(2)　$a > b > 0$ とする．球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ を平面 $z = b$ で 2 つに分けたとき，球面の上側の部分の面積について考えられることを，簡単な理由をつけて述べよ．