前期日程問題

平成１４年度医学科入学試験問題

数　　学

〔注意事項〕

1　監督者の指示があるまで，この冊子を開いてはいけない．

2　**解答用紙に受験番号と氏名を必ず記入すること．**

3　この問題冊子の本文は，４ページからなっている．落丁，乱丁及び印刷不鮮明な箇所があれば，手をあげて監督者に知らせること．

4　この問題冊子の計算用紙と余白は，適宜下書きに使用してもよい．

5　解答は，すべて別紙「解答用紙」の指定された場所に記入すること．

6　この問題冊子は持ち帰ること．

1

⑴　実数を係数とする任意の 4 次式は実数を係数とする 2 つの 2 次式の積であることを示せ．ただし，n 次方程式が複素数の範囲で解をもつことは知られているとする．

⑵　$f(x)$ は次の実数を係数とする 4 次式とする．

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

このとき，次を満たす実数を係数とする 2 次式 $g(x) = px^2 + qx + r$ が存在することを示せ．

4 次方程式 $f(x) = g(x)$ は 4 つの相異なる実数解をもつ．

2　1 から 20 の相異なる数がそれぞれに書かれた 20 枚のカードがある．このとき，下の問に対して，考え方を述べ，求める確率を既約分数で表せ．

⑴　A 君が 2 枚をでたらめに選び，その後，残りの 18 枚のカードから B 君が 5 枚をでたらめに選ぶ．このとき，

(1-1)　A 君の 2 枚のカードの 2 つの数値が B 君の 5 枚のどの数値よりも小さくなる確率を求めよ．

(1-2)　A 君の 2 枚のカードと B 君の 5 枚のカードの数値の総和が 30 以下である確率を求めよ．

⑵　A 君が 2 枚をでたらめに選び，それらをもとにもどした後，20 枚のカードから B 君が 5 枚をでたらめに選ぶ．このとき，

(2-1)　A 君の 2 枚のカードの 2 つの数値が B 君の 5 枚のどの数値よりも小さくなる確率を求めよ．

(2-2)　B 君の 5 枚のカードの数値の少なくとも 1 つが A 君の 2 枚のカードの数値に一致する確率を求めよ．

$\boxed{\textbf{3}}$　a，b，c は正の定数とする．

(1)　4 角形 ABCD において，AB $= a$，BC $= b$，CD $= c$，$\angle$ABD は直角とする．$\angle$C の外角 θ が $0 < \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で変化するとき，このような 4 角形 ABCD の面積が最大となるのは，$\theta = \angle$DAB が成り立つときであることを示せ．

(2)　4 角形 ABCD において，AB $= a$，BC $= b$，CD $= c$ とする．このような 4 角形 ABCD の面積が最大となるとき，4 角形 ABCD の特徴を求めよ．

4　n は 2 以上の整数とする．

xyz 空間座標において，xy 平面上に，次で定められた n 本の直線 g_1，g_2，$\cdots$，g_n がある．

$$g_k : x\cos\left(\frac{k}{n}\pi\right) + y\sin\left(\frac{k}{n}\pi\right) = 0, \quad z = 0 \qquad (k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

n 本の直線 g_1，g_2，$\cdots$，g_n を中心軸にもち，半径 a の n 本の円柱の内部の共通部分を K_n とし，その体積を V_n とする．このとき，

(1)　$n = 2$ のときの立体図形 K_2 の $z \geqq 0$ の部分の概形を描け．

(2)　体積 V_n を求めよ．

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} V_n$ を求めよ．