前期日程問題

平成１５年度医学科入学試験問題

数　　学

〔注意事項〕

1　監督者の指示があるまで，この冊子を開いてはいけない．

2　**解答用紙に受験番号と氏名を必ず記入すること．**

3　この問題冊子の本文は，4 ページからなっている．落丁，乱丁及び印刷不鮮明な箇所があれば，手をあげて監督者に知らせること．

4　この問題冊子の計算用紙と余白は，適宜下書きに使用してもよい．

5　解答は，すべて別紙「解答用紙」の指定された場所に記入すること．

6　この問題冊子は持ち帰ること．

$\boxed{1}$

関数 $f(x)$ を次で定める：

$$f(x) = x + x^3$$

x_0 は整数であり，数列 $\{x_n\}$ を次のように定める：

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

このとき，すべての正の整数 n について，$x_n - (-1)^n x_0$ は 3 で割り切れることを証明せよ．

2 円 C は点 $\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{1}{2}\right)$ $(a > 0)$ を中心とし，x 軸に接しているものとする．円 C が曲線 $y = x^2$ と 1 点のみを共有する（すなわち，接する）ような a を求めよ．さらに，この a に対して，円 C の外部で，x 軸と曲線 $y = x^2$ と円 C の円周とで囲まれた部分の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 1 から 7 までの番号が付けられた 7 枚のカードがある．

A さんと B さんは次のように 3 枚のカードをでたらめに選ぶ．

まず，A さんは 7 枚のカードから 3 枚を選び，もとに戻す．

次に，B さんは 7 枚のカードから 3 枚を選ぶ．

この試行について，次の確率を既約分数で求めよ．

(1) 2 人ともに選ばれたカードがちょうど 3 枚ある確率を求めよ．

(2) 2 人ともに選ばれたカードがちょうど 2 枚ある確率を求めよ．

(3) 2 人ともに選ばれたカードがちょうど 1 枚ある確率を求めよ．

(4) 2 人ともに選ばれたカードがまったくない確率を求めよ．

(5) 番号 1 のカードが 2 人ともに選ばれる確率を求めよ．

(6) 番号 1 のカードがどちらか 1 人だけに選ばれる確率を求めよ．

(7) 番号 1 のカードがだれにも選ばれない確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ a は正の定数で，$0 < \theta < \pi/4$ とする．
xyz 座標空間内において，

点 $\mathrm{A}(a\cos\theta,\ -a\sin\theta,\ 0)$ と z 軸を含む平面を α とし，
点 $\mathrm{B}(a\cos\theta,\ a\sin\theta,\ 0)$ と z 軸を含む平面を β とする．
原点を中心とし，半径 a の球面を S とする．

球面 T は，その中心が xz 平面上の $x > 0$ かつ $z > 0$ の部分にあり，次を満たすとする：

球面 T は，平面 α，β と xy 平面に接し，球面 S に内接している．

このとき，次の問に答えよ．

(1) 球面 T の半径 r を a と θ で表せ．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{r}{\theta}$ を求めよ．