前期日程問題

平成１６年度医学科入学試験問題

数　　学

〔注意事項〕

1　監督者の指示があるまで，この冊子を開いてはいけない．

2　**解答用紙に受験番号と氏名を必ず記入すること．**

3　この問題冊子の本文は，4 ページからなっている．落丁，乱丁及び印刷不鮮明な箇所があれば，手をあげて監督者に知らせること．

4　この問題冊子の計算用紙と余白は，適宜下書きに使用してもよい．

5　解答は，すべて別紙「解答用紙」の指定された場所に記入すること．

6　この問題冊子は持ち帰ること．

1 次の 4 次関数を $f(x)$ とする.

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cd + d$$

いま，直線 $y = px + q$ は曲線 $y = f(x)$ と異なる 2 点で接しているとする.

このとき，

(1) 次のような正数 h があることを示せ.

直線 $y = px + q + h$ は曲線 $y = f(x)$ と異なる 4 点で交わる.

(2) 上の(1)のような h に対して，直線 $y = px + q + h$ と曲線 $y = f(x)$ とで囲まれた領域のうちで，領域 $y \leqq px + q + h$ 内にある 2 つの領域の面積が等しいことを示せ.

2 h は正の定数で，xyz 座標空間において，次の 4 点 A，B，C，H がある．

$$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0),\quad \mathrm{B}\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right),$$

$$\mathrm{C}\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right),\quad \mathrm{H}(0,\ 0,\ h)$$

球面 S の中心は z 軸上にある．さらに，4 点 A，B，C，H の 2 点を通る 6 つの直線はどれも球面 S に接していて，すべての接点は 4 面体 ABCH の 6 つの辺上にある．

⑴　球面 S の半径 r を h の関数として表せ．

⑵　h が範囲 $h > 0$ で動くとき，球面 S の半径 r の最小値を求めよ．

なお，球面と直線との共通部分が 1 点からなるとき，球面と直線は接しているといい，その共有点を接点という．

3 無限数列 $f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，$\cdots$ は次の(i)〜(iii)を満たす．

(i) 任意の正の整数 m，n に対して，$f(mn) = f(m)f(n)$ が成り立つ．

(ii) 任意の正の整数 n に対して，$f(n) < f(n+1)$ が成り立つ．

(iii) $f(2) = 2$

このとき，

(1) 任意の正の整数 n，k に対して，次のような整数 p があることを示せ．

$$2^p \leqq n^k < 2^{p+1}$$

(2) 任意の正の整数 n に対して，$f(n) = n$ であることを示せ．

4　a は正の定数とし，次の 2 つの曲線を C_1，C_2 とする．

$$C_1 : y = x\log x \quad (x > 0)$$
$$C_2 : y = ax^2 \quad (x > 0)$$

このとき，

⑴　2 つの曲線 C_1，C_2 が異なる 2 点を共有するような定数 a の範囲を求めよ．

⑵　2 つの曲線 C_1，C_2 の共有点の x 座標 p，q $(p < q)$ が $q = p^2$ を満たすとき，定数 a および p，q を定めよ．

⑶　上の⑵で定めた定数 a に対して，2 つの曲線 C_1，C_2 が囲む領域の面積を求めよ．