前期日程問題

平成１９年度医学科入学試験問題

数　　学

〔注意事項〕

1 監督者の指示があるまで，この冊子を開いてはいけない．

2 **解答用紙に受験番号と氏名を必ず記入すること．**

3 この問題冊子の本文は，4 ページからなっている．落丁，乱丁及び印刷不鮮明な箇所があれば，手をあげて監督者に知らせること．

4 この問題冊子の計算用紙と余白は，適宜下書きに使用してもよい．

5 解答は，すべて別紙「解答用紙」の指定された場所に記入すること．

6 この問題冊子は持ち帰ること．

1　1 辺の長さが 1 である立方体を C とし，C の頂点の 1 つを A とする．A を中心とする半径 r の球を D とし，C と D の共通部分の体積を $V(r)$ とする．

⑴　$V(r)$ を r を用いて表せ．ただし $0 < r \leqq \sqrt{2}$ とする．

⑵　$\dfrac{V(r)}{r^2}$ $(0 < r \leqq \sqrt{2})$ が最大となる r の値を求めよ．

2　xy 座標平面において，y 軸上に中心をもつ円 C_1 と $y = x^3$ で表される曲線 C_2 は異なる 2 つの共有点 A，B をもち，A および B の両方の点において C_1 と C_2 は共通の接線をもつとする．

⑴　点 A または点 B は原点 O と一致することを示せ．

⑵　円 C_1 の中心の座標を求めよ．

3　n を 2 以上の整数とし，xy 座標平面において正 $2n$ 角形 S を考える．ただし，S の頂点 P_0，P_1，$\cdots$，P_{2n-1} は原点 O から等距離にあり，反時計回りに並んでいるとする．P_0 の座標を $(1,\ 0)$ とする．

p，q，r，s を実数とし，点 P_0 を点 $\mathrm{Q}_0(p,\ q)$ に，点 P_1 を点 $\mathrm{Q}_1(r,\ s)$ に移す 1 次変換（行列で表される点の移動）を f とする．

(1)　f を表す行列を n，p，q，r，s を用いて表せ．

(2)　Q_0，Q_1 が $\angle \mathrm{Q}_0\mathrm{O}\mathrm{Q}_1 = \angle \mathrm{P}_0\mathrm{O}\mathrm{P}_1$ をみたすような S の頂点とするとき，S のどの頂点も f によって再び S の頂点に移されることを示せ．

(3)　Q_0，Q_1 を(2)と同様とし，f によって自分自身に移される S の頂点の個数，つまり $f(\mathrm{P}_k) = \mathrm{P}_k$ となる P_k の個数を考える．（この個数は Q_0，Q_1 の取り方によって変わり得る．）この個数の取り得る値をすべて求めよ．

$\boxed{\textbf{4}}$ n を自然数とし，関数 $f_n(x) = \sin^{n+1} x$ の $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ における変曲点の x 座標を x_n とする．

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x_n)$ を求めよ．
ただし，必要ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ であることは用いてよい．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\frac{\pi}{2} - x_n\right)$ を求めよ．

(3) 点 $(x_n,\ f_n(x_n))$ における曲線 $y = f_n(x)$ の接線と x 軸との交点を P_n とし，直線 $x = \dfrac{\pi}{2}$ との交点を Q_n とする．3 点 P_n，Q_n および $\mathrm{R}\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$ を頂点とする三角形の面積を S_n とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}S_n$ を求めよ．