前期日程問題

平成２０年度医学科入学試験問題

数　　学

〔注意事項〕

1　監督者の指示があるまで，この冊子を開いてはいけない．

2　**解答用紙に受験番号と氏名を必ず記入すること．**

3　この問題冊子の本文は，4 ページからなっている．落丁，乱丁及び印刷不鮮明な箇所があれば，手をあげて監督者に知らせること．

4　この問題冊子の計算用紙と余白は，適宜下書きに使用してもよい．

5　解答は，すべて別紙「解答用紙」の指定された場所に記入すること．

6　この問題冊子は持ち帰ること．

1 xy 平面上において，曲線 $y = \log(2x+1)$ $(x > -\dfrac{1}{2})$ を C とおく．定数 $p > 0$ をとる．

⑴　曲線 C 上の点 $(t,\ \log(2t+1))$ における接線を l_t とする．接線 l_t と x 軸および 2 直線 $x = 0$，$x = p$ で囲まれた図形の面積を $A(t)$ とおき，$t > 0$ における $A(t)$ の最小値を A とおく．A を p を用いて表せ．

⑵　曲線 C と x 軸および直線 $x = p$ で囲まれた図形の面積を B とする．
極限値 $\displaystyle\lim_{p\to\infty} \frac{A-B}{p}$ を求めよ．
ただし，必要ならば

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

であることは証明なしに用いてよい．

2 四角形 ABCD は半径 1 の円 O に内接し，AB = AD，CB = CD をみたしている．

(1) 線分 AC は円 O の直径であることを示せ．

辺 CB，CD の中点をそれぞれ M，N とする．四角形 ABCD を線分 AM，AN，MN に沿って折り曲げて点 B，C，D を重ね，四面体 AMNC をつくる．$x = \mathrm{CM}$ $(0 < x < 1)$ とおく．

(2) 四面体 AMNC の体積 V を x を用いて表せ．

(3) 四面体 AMNC に内接する球の表面積 S を x を用いて表し，$0 < x < 1$ における S の最大値を求めよ．

$\boxed{3}$ n を 4 以上の整数とし，1，2，…，n を並びかえて得られる順列 a_1，a_2，…，a_n を考える．このような順列のうちで，隣り合う二項の大小を比較したときに，次の性質

$$(\mathrm{V}):\begin{cases} a_1 > a_2 > \cdots > a_k < a_{k+1} < \cdots < a_n \\ \text{となる } k\ (1 < k < n) \text{ が存在する．} \end{cases}$$

をもつ順列の総数を $V(n)$ と表す．例えば，$n = 4$ のとき，順列 2，1，3，4 や 3，2，1，4 などは性質 (V) をもつ

同様に，性質

$$(\mathrm{N}):\begin{cases} a_1 = 1 \text{ かつ} \\ a_1 < a_2 < \cdots < a_i > \cdots > a_j < \cdots < a_n \\ \text{となる } i,\ j\ (1 < i < j < n) \text{ が存在する．} \end{cases}$$

をもつ順列の総数を $N(n)$ と表す．例えば，$n = 7$ のとき，順列 1，3，5，4，2，6，7 や 1，7，6，4，3，2，5 や 1，2，5，3，4，6，7 などは性質 (N) をもつ．

さらに性質 (N) をもつ順列のうち，$a_n = n$ をみたすものの総数を $N'(n)$ と表し，$a_n \neq n$ をみたすものの個数を $N''(n)$ と表す．

(1) $V(n)$ を n を用いて表せ．

(2) $N'(n+1) = N(n) + \dfrac{V(n)}{2}$ であることを示せ．

(3) $N''(n) = \dfrac{3^{n-2}+1}{2} - 2^{n-2}$ であることを示せ．

(4) $N(n)$ を n を用いて表せ．

4 xy 平面上の点 $(0,\ -1)$ を中心とする半径 2 の円を C とおく．第 1 象限に中心をもち，C に内接し，x 軸に接する二つの円 A，B を考える．円 A，B は互いに外接しているものとする．円 A の中心の x 座標を p，半径を r，円 B の中心の x 座標を q，半径を s とし，$p < q$ をみたしているとする．

⑴　極限値 $\displaystyle\lim_{p \to \sqrt{3}-0} \frac{\sqrt{3}-p}{r}$ を求めよ．

⑵　極限値 $\displaystyle\lim_{p \to \sqrt{3}-0} \frac{s}{r}$ を求めよ．