前期日程問題

平成２１年度医学科入学試験問題

数　　学

〔注意事項〕

1　監督者の指示があるまで，この冊子を開いてはいけない．

2　**解答用紙に受験番号と氏名を必ず記入すること．**

3　この問題冊子の本文は，4 ページからなっている．落丁，乱丁及び印刷不鮮明な箇所があれば，手をあげて監督者に知らせること．

4　この問題冊子の計算用紙と余白は，適宜下書きに使用してもよい．

5　解答は，すべて別紙「解答用紙」の指定された場所に記入すること．

6　この問題冊子は持ち帰ること．

1

(1)　整数からなる公差 1 の等差数列 a，b，c，d で

$$a^3 + b^3 + c^3 = d^3$$

をみたすものを求めよ．

(2)　0 でない整数からなる等比数列 a，b，c，d で

$$a^3 + b^3 + c^3 = d^3$$

をみたすものは存在しないことを示せ．

2 a を正の定数とする．曲線 $y = \dfrac{1}{x}\ (x > 0)$ を C_1 とし，曲線 $y = -\dfrac{a}{x}\ (x \neq 0)$ を C_2 とする．曲線 C_1 上の点 P から曲線 C_2 へ 2 本の接線を引き，それぞれの接点を Q，R とする．$\triangle$PQR の重心を G とする．

(1) 点 P が曲線 C_1 上を動くとき，重心 G が定点となるような a の値を求めよ．

以下では a は(1)で求めた値とする．

(2) 点 P が曲線 C_1 上を動くとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{GQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{GR}}$ の取る値の範囲を求めよ．

(3) $\theta = \angle \mathrm{QGR}$ とおく．点 P が曲線 C_1 上を動くとき，θ の最小値を求めよ．

3 曲線 $C : y = xe^{-x}$ について以下の問いに答えよ．

(1) 曲線 C の接線で点 $(1,\ a)$ を通るものがちょうど 2 本存在するような a の値をすべて求めよ．

(2) (1)で求めた a のうち最大のものを a_0 とする．点 $(1,\ a_0)$ を通る曲線 C の接線のうち，傾きが負になるものを l とするとき，曲線 C と直線 l および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

4 xyz 空間において，原点 O を中心とする xy 平面内の半径 1 の円周 K を考える．n は 3 以上の整数とする．K の n 等分点 $\mathrm{P}_k\left(\cos\dfrac{2\pi k}{n},\ \sin\dfrac{2\pi k}{n},\ 0\right)$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ をとる．P_1，P_2，…，P_n を中心とする xy 平面内の半径 s の円を順に L_1，L_2，…，L_n とする．ただし，L_1 と L_2，L_2 と L_3，…，L_{n-1} と L_n，L_n と L_1 は互いに外接しているとする．

(1) 半径 s を n を用いて表せ．

次に，L_1，L_1，…，L_n を底面とした同じ高さ h の n 個の円錐を考え，順に A_1，A_2，…，A_n とおく．ただし，A_1，A_2，…，A_n の頂点の z 座標はいずれも正とする．A_1，A_2，…，A_n のすべての頂点を通る円周を K' とする．K' を周に持つ円を底面とし，$\mathrm{Z}(0,\ 0,\ z)$ $(z < 0)$ を頂点とする円錐で A_1，A_2，…，A_n のそれぞれと側面で接するものを B とする．このとき，B に外接する球面 S （K' および Z を B と共有する球面）が L_1，L_2，…，L_n のそれぞれと一点のみを共有するように h を定める．

(2) S と L_n の共有点を Q_n とおくとき，線分 $\mathrm{Q}_n\mathrm{Z}$ の長さは 2 であることを示せ．

(3) h を s を用いて表せ．

(4) n 個の円錐 A_1，A_2，…，A_n の体積の和を V とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{V}{s^2}$ を求めよ．

（注） 2 つの円錐が側面で接するとは，2 つの円錐の側面の共通部分がただ一つの線分となることである．