前期日程問題

平成２２年度医学科入学試験問題

数　　学

〔注意事項〕

1 監督者の指示があるまで，この冊子を開いてはいけない．

2 **解答用紙に受験番号と氏名を必ず記入すること．**

3 この問題冊子の本文は，4 ページからなっている．落丁，乱丁及び印刷不鮮明な箇所があれば，手をあげて監督者に知らせること．

4 この問題冊子の計算用紙と余白は，適宜下書きに使用してもよい．

5 解答は，すべて別紙「解答用紙」の指定された場所に記入すること．

6 この問題冊子は持ち帰ること．

1 Oを原点とする座標平面上の楕円 C : $\dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1$ を考える.

点 $\mathrm{P}(t,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}t)$ （ただし，$t > 1$）を通る楕円 C の2つの接線を l_1，l_2 とし，それらと楕円の接点をそれぞれ Q，R とする．点 Q を通り l_1 と直交する直線を m_1 とし，点 R を通り l_2 と直交する直線を m_2 とする．直線 m_1 と m_2 の交点を S とする．ただし，Q の x 座標は R の x 座標より大きいとする.

(1) 2点 Q，R の座標を t を用いて表せ.

(2) 点 S の座標を t を用いて表せ.

(3) t が1より大きい実数全体を動くとき，点 S の軌跡を求めよ.

(4) $t > \sqrt{2}$ であるとき，△OPS の面積を $A(t)$ とする．$\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{A(t)}{t^2}$ を求めよ.

$\boxed{\textbf{2}}$ n を 3 以上の整数とする．1 以上の整数 M を n で割ったときの商を M_1，余りを a_1 とする．続いて，M_1 を n で割ったときの商を M_2，余りを a_2 とする．このようにして 1 以上の整数 i に対して，M_i を n で割ったときの商を M_{i+1}，余りを a_{i+1} とおく．このとき $M_i = 0$ となるような i の最小値を k とする．次に，M に対して，$a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ を対応させる関数を $f(M)$ と表す．すなわち $f(M) = \sum_{i=1}^{k} a_i$ である．

たとえば $M = 5^3$，$n = 10$ のときは，$k = 3$ であり，$f(M) = 8$ となる．

(1) M を a_1，a_2，$\cdots$，a_k と n を用いて表せ．

(2) $f(M) \leqq M$ であることを示せ．また，等号が成立するための条件を n と M を用いて表せ．

(3) $M - f(M)$ は $n - 1$ で割り切れることを証明せよ．

次に，$f^1(M) = f(M)$，$f^j(M) = f(f^{j-1}(M))$ $(j \geqq 2)$ により $f^j(M)$ を定める．M に対して，$f^j(M) < n$ となるような j の最小値を s とし，$f^s(M)$ の値を $R(M)$ とおく．

(4) M が $n - 1$ で割り切れるとき，$R(M)$ を求めよ．

(5) M が $n - 1$ で割り切れないとき，$R(M)$ がどのような値となるかを n，M を用いて説明せよ．

$\boxed{3}$ $a > 0$ とし，座標平面上の 2 つの曲線

$$C_1 : y = e^{-\frac{x^2}{4}}, \quad C_2 : y = -\frac{a}{4}x^2 + a(1 - \log a)$$

を考える．

(1) $a > 1$ であるとき，C_1 と C_2 は共有点をもたないことを示せ．

(2) $0 < a < 1$ であるとき，C_1 と C_2 の共有点の座標を a を用いて表せ．

(3) (2)の場合で，共有点が C_1 の変曲点であるとき，a の値を求めよ．

(4) a が(3)の値のとき，C_1 と C_2 で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

$\boxed{4}$

(1)　p，q を $1 < p < q$ をみたす実数とし，3 辺の長さが 1，p，q の直方体 V を考える．長さ q の辺と垂直な平面で V を 2 つに分割して，3 辺の長さが 1，p，1 の直方体と 3 辺の長さが 1，p，$q-1$ の直方体 U を作る．p，q が条件 $q-1<1$，$q=p^2$，$p(q-1)=1$ をみたすならば，V と U は相似であることを示せ．

p，q を(1)の条件をみたす実数とし，座標空間の 8 点

$A_1(0,\ 0,\ 0)$,　　$A_2(0,\ 1,\ 0)$,　　$A_3(0,\ 1,\ p)$,　　$A_4(0,\ 0,\ p)$

$B_1(q,\ 0,\ 0)$,　　$B_2(q,\ 1,\ 0)$,　　$B_3(q,\ 1,\ p)$,　　$B_4(q,\ 0,\ p)$

を頂点とする直方体を V_0 とする．点 P_0 を $P_0 = A_4$ とおく．次に，1 以上の整数 n に対して，直方体 V_n とその頂点 P_n を以下のようにして順に定める．

$k \geqq 0$ とし，直方体 V_k とその頂点 P_k が定まったとする．頂点 P_k を含む V_k の 3 つの面のうち，V_k の最短辺と最長辺とを含む面を考える．この面内で，P_k を頂点として含み，この面の最短辺を 1 辺とする正方形を考える．この正方形の，P_k を端点とする対角線を考え，その対角線の P_k と異なる方の端点を P_{k+1} とする．P_{k+1} を通り V_k の最長辺と垂直な平面で V_k を分割し，P_k を含まない方の直方体を V_{k+1} とする．

(2)　$n \geqq 0$ のとき，直方体 V_n の長さは $\dfrac{1}{p^n}$，$\dfrac{1}{p^{n-1}}$，$\dfrac{1}{p^{n-2}}$ であることを示せ．

(3)　P_1，P_2，P_3，P_4，P_5，P_6 の座標を p を用いて表せ．

(4)　P_{6n} $(n \geqq 0)$ の z 座標を z_n とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} z_n$ の値を p を用いて表せ．